

11 клас

1. Ява і Павлуша давно не бачилися один з одним, та вирішили зустрітися. Вони одночасно вийшли назустріч один одному, рухаючися з постійними (але, можливо, різними) швидкостями. За 10 хвилин Павлуша пройшов $2/15$ початкової відстані між ними і ще 300 м. А Ява за півгодини пройшов на 900 м менше, ніж $1/5$ початкової відстані між ними. Через який час після виходу вони зустрілися? Відповідь обґрунтуйте.

2. На дошці написано одинадцять натуральних чисел з сумою 441 (серед них можуть бути однакові). Яке найменше значення може приймати найменше спільне кратне всіх цих чисел? Відповідь обґрунтуйте.

3. Для деякого многочлена $f(x)$ та дійсного числа α виконується рівність

$$\alpha^3 + 2022\alpha = (f(\alpha))^3 + 2022f(\alpha) = 2024.$$

Доведіть, що $(f^n(\alpha))^3 + 2022f^n(\alpha) = 2024$ для довільного натурального числа n . Тут через $f^n(x)$ позначено $\underbrace{f(f(f \cdots f(x) \cdots))}_{n \text{ разів}}$.

4. Навколо гострокутного трикутника ABC описане коло ω . Висота, опущена з точки A на BC , перетинає BC в точці D , а ω – в точці K . Коло, що проходить через точку A та дотикається до BC в точці D , вдруге перетинає ω у точці E . Пряма AE перетинає пряму BC в точці T , а пряма TK вдруге перетинає ω у точці S . Пряма SD вдруге перетинає ω у точці X . Доведіть, що точка X симетрична точці A відносно серединного перпендикуляра до відрізка BC .

5. Місто має форму квадрата зі стороною n фурлонгів. Воно розбите прямолінійними вулицями на n^2 кварталів, які є квадратами зі стороною 1 фурлонг. З метою зменшення кількості ДТП мер міста хоче організувати патрулювання вулиць декількома екіпажами поліції. Кожен екіпаж має рухатися вулицями міста по замкненій прямокутній траєкторії. Яку найменшу кількість екіпажів поліції доведеться організувати, якщо мер хоче, щоб кожна ділянку кожної вулиці патрулював принаймні один екіпаж? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 4 години.

Користуватися при розв'язуванні задач калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

11 клас

1. Вісім школярів та вісім вчителів сіли за круглий стіл так, що кожен школяр сидить між двома вчителями, а кожен вчитель – між двома школярами. Кожен з присутніх написав на папірці деяке ненульове дійсне число та порівняв його з числами сусідів. Виявилось, що в кожного школяра записане число дорівнює сумі двох чисел, записаних вчителями, що сидять поруч із ним, а в кожного вчителя записане число дорівнює добутку двох чисел, записаних школярами, що сидять поруч із ним. Знайдіть усі значення, які може приймати сума всіх шістнадцяти записаних чисел. Відповідь обґрунтуйте.

2. У гострокутному трикутнику ABC точки M , N і K є серединами сторін BC , AC і AB відповідно. Нехай P і Q – основи перпендикулярів з точки M на AB і AC відповідно. Пряма, що проходить через точку K паралельно до PQ , перетинає пряму MQ в точці T . Доведіть, що $AM \perp NT$.

3. Задано натуральне число n . Надійка намалювала на папері в клітинку квадрат $n \times n$ та розфарбувала клітинки цього квадрата в декілька кольорів (кожна клітинка пофарбована рівно в 1 колір). Сашко записав у зошит усі пари кольорів (c, d) такі, що в квадраті є клітинка кольору c та клітинка кольору d , які мають спільну сторону. Надійка помітила, що кожен колір присутній не більше, ніж у двох виписаних парах. У яку найбільшу кількість кольорів могла розфарбувати квадрат Надійка? Відповідь обґрунтуйте.

4. Учитель написав на дошці натуральне число n , яке має більше, ніж 1200 натуральних дільників, та попросив Оксанку виписати всі натуральні дільники числа n у порядку зростання. Потім учитель витер з дошки 300 найменших та 300 найбільших дільників. Оксанка з подивом для себе помітила, що серед дільників, що залишилися, однакова кількість кратних 13 та не кратних 13. Доведіть, що серед усіх дільників числа n теж однакова кількість кратних 13 та не кратних 13.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 4 години.

Користуватися при розв'язуванні задач калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.