10 клас

1. Вчитель назвав три числа. Іванко виписав у зошиті для кожної пари чисел їхнє середнє арифметичне. Марійка зауважила, що якщо розглянути числа, обернені до записаних Іванком, то вийде арифметична прогресія. Доведіть, що квадрати чисел, названих учителем, також утворюють арифметичну прогресію.

2. На дошці написано одинадцять натуральних чисел з сумою 441 (серед них можуть бути однакові). Яке найбільше значення може приймати найбільший спільний дільник усіх цих чисел? Відповідь обґрунтуйте.

3. Нехай ABC — прямокутний трикутник з $\angle C = 90^\circ$ і $\angle B = 30^\circ$. Серединний перпендикуляр до AB перетинає бісектрису BK кута B у точці E. Серединний перпендикуляр до EK перетинає BC в точці D. Доведіть, що $KD \perp DE$.

4. У програміста Сашка є два бінарні коди зі 100 цифр (кожен код – послідовність зі 100 символів, кожен з яких 0 або 1). За одну секунду Сашко може або вставити в будь-яке місце коду декілька однакових цифр поспіль, або видалити декілька однакових цифр поспіль. Доведіть, що він зможе з першого коду отримати другий не більш ніж за 100 секунд.

5. Доведіть, що для кожного дійсного числа $r > 2$ існує рівно два або три додатні дійсні числа x, які задовольняють рівність $x^2 = r[x]$. *Символом* $[x]$ *позначають цілу частину числа* x*, тобто найбільше ціле число, що не перевищує* x.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 4 години.
Користуватися при розв'язуванні задач калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

10 клас

1. Шість школярів та шість вчителів сіли за круглий стіл так, що кожен школяр сидить між двома вчителями, а кожен вчитель – між двома школярами. Кожен з присутніх написав на папірці деяке ненульове дійсне число та порівняв його з числами сусідів. Виявилося, що в кожного школяра записане число дорівнює сумі двох чисел, записаних вчителями, що сидять поруч із ним, а в кожного вчителя записане число дорівнює добутку двох чисел, записаних школярами, що сидять поруч із ним. Знайдіть усі значення, які може приймати сума всіх дванадцяти записаних чисел. Відповідь обґрунтуйте.

2. У футбольному турнірі в одне коло взяли участь 10 команд. Відомо, що команди, що посіли перші три місця, набрали порівну очок. Решта 7 команд теж набрали порівну очок, причому вдвічі менше, ніж кожна з перших трьох. Доведіть, що в турнірі було принаймні 5 нічиїх. *У футболі за перемогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, а за поразку – 0 очок.*

3. Задано натуральні числа m, n і k, що відмінні від 1. Виявилось, що $mnk+1$ ділиться на $mn-n+1$, і при цьому $n>k$. Доведіть, що n ділиться на m.

4. На основі AC та на бічній стороні BC рівнобедреного трикутника ABC обрано точки D та E відповідно так, що $CD=DE$. Нехай M, N і K – це середини відрізків DE, AE і BD відповідно. Описане коло трикутника DMK вдруге перетинає AD у точці P, а описане коло трикутника MEN вдруге перетинає BE у точці Q. Пряма, що проходить через точку K паралельно AC, перетинає AB у точці R. Нехай S – це перетин прямих RM та PQ. Доведіть, що точки N, S та K лежать на одній прямій.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 4 години.
Користуватися при розв'язуванні задач калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.