9 клас

1. Пончик та Сиропчик купили коробку з 35 тістечками. Вони вирішили, що хочуть з'їсти всі тістечка за 2 дні, причому в перший день Пончик має з'їсти $2/5$ від того, що з'їсть в цей день Сиропчик, а на другий день Сиропчик має з'їсти $3/4$ того, що з'їсть в цей день Пончик. Вони прийшли до Знайка і спитали, як їм з'їсти тістечка так, щоб модуль різниці між числом тістечок, які з'їсть Пончик та які з'їсть Сиропчик, був найменшим можливим. Як Знайко має розподілити кількість тістечок по днях, щоб Пончик та Сиропчик досягли своєї мети? *Тістечка не можна ділити на шматки.* Відповідь обґрунтуйте.

2. На дошці написано числа 1, 2, …, 100. За одну операцію дозволяється стерти з дошки два числа і записати замість них їхній добуток, збільшений на 1331. Чи може після 99 таких операцій на дошці залишитися число вигляду $100\ldots0$? Відповідь обґрунтуйте.

3. Дійсні числа a і b задовольняють умову $a + b = 1$. Доведіть нерівність

$$(a^2 + b)(b^2 + a) \geq \frac{9}{16}.$$

4. У трикутнику ABC проведено медіани BK і CM. Дотична в точці K до кола, описаного навколо AMK, перетинає BC у точці L. Доведіть, що пряма, що проходить через центри описаних кіл трикутників AMK та BML, перпендикулярна до CM.

5. На вечірці зібралося більше ста людей. Відомо, що які би 100 людей не обрати, серед них буде непарне число пар знайомих людей. Яка найбільша кількість людей могла бути на цій вечірці? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 4 години.
Користуватися при розв'язуванні задач калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

9 клас

1. Знайдіть усі трійки цілих чисел (m, n, k), що задовольняють умови: $mn + k = 2023$, $m + nk = 2024$.

2. У рівнобедреному трикутнику ABC на основу опущено висоту AH. На відрізку AH обрано точку P, а на прямій BP – точку Q таку, що $AQ \parallel BC$. Виявилося, що $\angle PCQ = 90°$. Доведіть, що промінь CQ є бісектрисою зовнішнього кута C трикутника ABC.

3. На чемпіонат світу з квідичу до чарівного містечка Квідичфілд зібралися 1000 фанатів цієї гри з 32 країн. Спочатку їх розмістили по двоє в наметах. Для економії місця, організатори хочуть переселити чотирьох уболівальників з двох наметів у новий великий намет, але щоб серед них були представники рівно двох країн. Проте вони не змогли знайти жодні два потрібні намети серед усіх. Доведіть, що з однієї з країн на чемпіонат прибуло принаймні 70 фанатів квідичу.

4. Прості числа p та q такі, що обидва числа $q - p$ та $pq - p$ є квадратами натуральних чисел. Знайдіть усі можливі значення, які можуть приймати p та q.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 4 години.
Користуватися при розв'язуванні задач калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.