8 клас

1. Бонні та Клайд крадуть одне в одного гроші зі скриньок. Спочатку у Бонні на 96 доларів більше, ніж у Клайда. Щотижня Бонні краде чверть грошей Клайда, а Клайд (у той же час) краде чверть грошей Бонні. У кого зі злодіїв через три тижні буде більше грошей, і на скільки? Відповідь обґрунтуйте.

2. Дійсні числа x, y, z задовольняють рівність $|x-y| = 2|x-z| = 3|y-z|$. Доведіть, що $x = y = z$.

3. Знайдіть усі трійки натуральних чисел (m, n, k), для яких число $mn+mk+nk$ є простим, і при цьому справджується рівність $\dfrac{m+n}{n+k} = \dfrac{m+k}{m+n}$. Відповідь обґрунтуйте.

4. У шафці в ельфа-домовика зберігається 41 шкарпетка: 10 зелених, 13 жовтих та 18 червоних. Ельф дістає та надягає на себе шкарпетки по черзі. Якщо в якийсь момент кількість одягнених зелених шкарпеток є меншою від кількості одягнених жовтих шкарпеток, а кількість одягнених жовтих – меншою від кількості одягнених червоних, то він більше не може діставати шкарпетки. Яку найбільшу кількість шкарпеток зможе одягнути на себе ельф-домовик? Відповідь обґрунтуйте.

5. Усередині гострокутного трикутника ABC вибрано точку P так, що

$$\angle APB = \angle APC = 180^\circ - \angle BAC.$$

Нехай E – це точка, що симетрична A відносно точки P. Доведіть, що E належить описаному колу трикутника ABC.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 4 години.
Користуватися при розв'язуванні задач калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

8 клас

1. Знайдіть усі натуральні числа a і b такі, що $a! \cdot b! = 10!$. *Через $n!$ позначено добуток перших n натуральних чисел: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.*

2. На колі ω з центром у точці O відмічено точку A, а на дотичній до кола в точці A – довільну точку B. На відрізку AB обрали точку C. На описаному колі трикутника OBC обрано точку D так, що $OB = OD$. Доведіть, що пряма CD дотикається до ω.

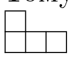
3. Відомо, що для деяких чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_{2024} виконується рівність

$$\frac{x_2}{x_1(x_1+x_2)} + \frac{x_3}{x_2(x_2+x_3)} + \ldots + \frac{x_{2024}}{x_{2023}(x_{2023}+x_{2024})} + \frac{x_1}{x_{2024}(x_{2024}+x_1)} = 2024.$$

Знайдіть значення виразу

$$\frac{x_1}{x_2(x_1+x_2)} + \frac{x_2}{x_3(x_2+x_3)} + \ldots + \frac{x_{2023}}{x_{2024}(x_{2023}+x_{2024})} + \frac{x_{2024}}{x_1(x_{2024}+x_1)}.$$

Відповідь обґрунтуйте.

4. Том і Гек вирізали з аркуша в клітинку квадрат 2025×2025 та вирішили зіграти у гру. Гек має вирізати з квадрата декілька клітинок і передати цей дірявий квадрат Тому. Після цього Том намагається вирізати з того, що залишилося, фігурку вигляду . Мета Гека – завадити Тому. Яку найменшу кількість клітинок має вирізати Гек? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 4 години.
Користуватися при розв'язуванні задач калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.