

7 клас

1. Два бізнесмени домовляються про купівлю-продаж автомобіля. Спочатку продавець оцінив його в 480 000 гривень, а покупець запропонував 320 000 гривень. Після переговорів продавець пішов на поступки і знизив ціну на певну кількість відсотків, а покупець, у свою чергу, підвищив свою пропозицію на ту саму кількість відсотків. Несподівано для обох, їхні ціни зрівнялися і вони домовилися про остаточну суму угоди. Якою була ця сума в гривнях? Відповідь обґрунтуйте.

2. Будемо називати *видовженістю* прямокутника відношення його більшої сторони до меншої (видовженість квадрату дорівнює 1). Доведіть, що можна розрізати квадрат площею 100 на чотири прямокутники площею 10, 20, 30 і так, щоб видовженість кожного була меншою, ніж 2. *Сторони прямокутників можуть бути нецілими.*

3. Вчитель дав Петрові завдання — до кожного з дев'яти однакових натуральних чисел, які виписані на дошці одне під одним, Петро має дописати зліва або справа одну ненульову цифру. При цьому всі дописані цифри мають бути різними. Яка найбільша кількість простих могла бути серед дев'яти чисел, отриманих Петром? Відповідь обґрунтуйте.

4. На міжнародний економічний форум зібралися 100 найбагатших людей зі списку Форбс. Вони розмістилися у залі в 10 рядах по 10 крісел в кожному. Кожен з учасників порівнює свій статок зі статками сусідів ліворуч, праворуч, попереду, позаду та по діагоналях. Людина вважає себе дуже заможною, якщо не більше ніж один її сусід має більші статки. Яка найбільша кількість учасників може вважати себе дуже заможними за підсумками порівняння, якщо відомо, що статки всіх учасників форуму різні? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 3 години.

Користуватися при розв'язуванні задач калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

7 клас

1. Вчитель написав на дошці натуральне число, друга цифра якого не дорівнює 0. Євген та Дмитро переписали це число собі у зошити. Євген закреслив останню цифру цього числа та помітив, що отримане число ділиться на 20. Дмитро ж закреслив першу цифру цього числа та помітив, що отримане число ділиться на 21. Яке найменше число міг написати вчитель? *Цифри числа нумеруються зліва направо.* Відповідь обґрунтуйте.

2. У гострокутному трикутнику ABC $\angle BAC = 30^\circ$. Відрізки BH і CK — висоти трикутника, а точки P і Q — середини сторін BA і CA відповідно. Доведіть, що пряма PH перпендикулярна прямій QK .

3. На папері намальовано пряму. Антон та Ярослав по черзі відмічають по одній точці на цій прямій наступним чином: кожна нова точка не повинна співпадати із жодною з попередніх, і після кожного ходу множина всіх відмічених точок має бути симетричною відносно деякої точки прямої (не обов'язково відміченої). Першим ходить Антон. Програє той, хто не може зробити хід. Чи є в когось з хлопців вигрешна стратегія, і якщо так, то в кого? Відповідь обґрунтуйте.

4. Натуральні числа $1, 2, \dots, 42$ розташували по колу в деякому порядку. Для кожної пари чисел, що стоять поруч, порахували різницю (від більшого числа віднімали менше). Чи може сума сорока двох отриманих різниць дорівнювати 72? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 4 години.

Користуватися при розв'язуванні задач калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.