Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LXI Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

«Якщо існує штучний інтелект,
то має існувати і штучна тупість»

9 клас

9–1. Олексій і Богдан грають у гру з двома купами камінців. На початку одна з куп містить 2021 камінець, а друга – порожня. За один хід кожний з хлопців має забрати парну кількість каменів (більше нуля) з довільної купи, після чого перекласти половину із взятих камінців до іншої купи, а другу половину – вилучити з гри. Програє той, хто не може зробити хід. Хто переможе у цій грі, якщо обидва прагнуть перемогти, а починає Богдан?

9–2. Доведіть, що існують такі різні натуральні числа a та b, більші 1000000, що (a^b+1) ділиться націло на (b^a+1).

9–3. Невід'ємні числа x_1, x_2, …, x_n такі, що $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=n$, $n>1$. Доведіть, що для довільних невід'ємних дійсних чисел y_1, y_2, …, y_n існують індекси $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, не обов'язково різні, для яких справджується нерівність: $x_i+y_j-x_{j+1}y_{i+1}\geq 1$ (індекс $n+1\equiv 1$).

9–4. Дано трикутник ABC, в якому $\angle A=60^\circ$. На сторонах AB і AC відмітили такі точки P і Q відповідно, що $BP=PQ=QC$. Доведіть, що описане коло трикутника APQ проходить через проекцію ортоцентра трикутника ABC на його медіану, що проведена до сторони BC.

1 квітня 2021 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LXI Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

«Оптимiст не може бути приємно здивованим».
Формула Мерфі

9 клас

9–5. Позначимо через M множину, що складається з натуральних чисел, які можна подати у вигляді $(a+b)(a^2+b^2)$, де a, b – деякі різні натуральні числа. Доведіть, що для довільних натуральних чисел $n > k$ число $n^4 - k^4$ є сумою деяких $n-k$ попарно різних елементів множини M.

9–6. Кола w_1 та w_2 перетинаються в точках P і Q та дотикаються до кола w з центром у точці O внутрішнім чином у точках A та B відповідно. Відомо, що точки A, B та Q лежать на одній прямій. Доведіть, що точка O лежить на зовнішній бісектрисі $\angle APB$.

9–7. На всеукраїнську олімпіаду з математики приїхало 100 дітей з 10 регіонів України, по 10 дітей з кожного регіону. На відкритті вони стали в один ряд на сцену, але не всі діти з одного регіону стояли підряд. Двох сусідніх дітей з різних регіонів можна поміняти місцями за 1 секунду. За який найменший час можна гарантовано зробити так, щоб діти вишикувались по регіонам (регіони можуть йти в довільному порядку)?

9–8. Для довільного натурального $a > 1$ визначимо послідовність (a_n) таким чином: $a_{n+1} = a_n + d(a_n) - 1, n \in \mathbf{N}$, $a_1 = a$, де через $d(b)$ позначений найменший простий дільник числа b. Доведіть, що для довільного натурального k послідовність $d(a_n)$ при $n \geq k$ не є зростаючою, тобто умова $d(a_{n+1}) \geq d(a_n)$ не справджується для усіх $n \geq k$.

2 квітня 2021 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів