Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LXI Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

«Якщо існує штучний інтелект,
то має існувати і штучна тупість»

8 клас

8–1. Відомо, що для деяких цілих чисел $a_{2021}, a_{2020}, \ldots, a_1, a_0$ та довільного натурального числа n вираз $a_{2021}n^{2021} + a_{2020}n^{2020} + \ldots + a_1 n + a_0$ ділиться націло на 10. Чи обов'язково кожне з чисел $a_{2021}, a_{2020}, \ldots, a_1, a_0$ також ділиться на 10?

8–2. У абетці племені Которас рівно 11 букв. Відомо, що для довільного натурального k є рівно п'ять k-буквених поганих слів у мові цього племені. Доведіть, що можна придумати слово на мові Которас з довільної кількості букв, яке не можна буде розрізати на два менших слова, з яких хоча б одне вважається поганим.

8–3. Числа $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2021})$ та $(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{2021})$ є деякими різними перестановками чисел $(1,\ 2,\ \ldots,\ 2021)$, а числа $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2021})$ – деякою перестановкою чисел $(2,\ 4,\ \ldots,\ 4042)$. Доведіть, що наведене число D є додатним:

$$D = \frac{c_1^2 - 4a_1b_1}{a_1 + b_1 + c_1} + \frac{c_2^2 - 4a_2b_2}{a_2 + b_2 + c_2} + \ldots + \frac{c_{2021}^2 - 4a_{2021}b_{2021}}{a_{2021} + b_{2021} + c_{2021}}.$$

8–4. Трикутник ABC – рівнобедрений з вершиною у точці A. Всередині ΔABC вибрані точки P і Q такі, що $\angle BPC = \frac{3}{2}\angle BAC$, $BP = AQ$ та $AP = CQ$. Доведіть, що $AP = PQ$.

1 квітня 2021 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

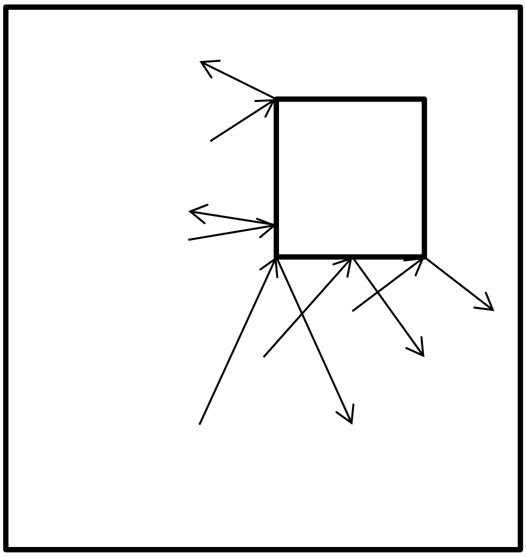
LXI Всеукраїнська олімпіада юних математиків

<u>Другий день</u>

«Оптиміст не може бути приємно здивованим».
Формула Мерфі

8 клас

8–5. Знайдіть усі натуральні числа, які можна подати у вигляді $\frac{abc+ab+a}{abc+bc+c}$, де a, b, c – натуральні числа.



8–6. Заданий квадрат 2021×2021 з дзеркальною внутрішньою межею, у якому 2020 квадратиків 1×1 мають дзеркальну зовнішню межу, а усі інші квадратики мають прозорі межі. Вибирається довільний кут $\alpha \in (0°, 90°)$. Промінь світла проходить без зміну напряму через прозору межу, і відбивається за законом відображення при потраплянні на дзеркальну межу, при цьому, якщо промінь потрапляє точно в кут дзеркального квадрата, то він відбивається як від горизонтальної сторони квадрата (рис.). Доведіть, що з деякої точки нижньої сторони квадрата можна випустити промінь світла, що утворює обраний кут α з цією стороною (таких променів є два) таким чином, щоб світло дійшло до верхньої сторони квадрата.

8–7. Андрій і Богдан по черзі розставляють числа від 1 до n в клітинках таблиці $n \times n$ так, щоб в жодному рядку та стовпчику не було двох рівних чисел. Андрій ходить першим, а програє той, хто не може зробити хід. В залежності від n, хто має виграшну стратегію?

8–8. Задані декілька натуральних чисел $a_1, \ldots, a_k$. Доведіть, що існує такий натуральний множник N, для якого суми цифр чисел $Na_1, \ldots, Na_k$ відрізняються менше ніж у $\frac{2021}{2020}$ разів, тобто, якщо серед чисел $Na_1, \ldots, Na_k$ найбільша сума цифр – це величина $S_{\max}$, а найменша – це $S_{\min}$, то $\frac{S_{\max}}{S_{\min}} < \frac{2021}{2020}$.

2 квітня 2021 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів