

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2023 рік. 9 клас. 3 тур

1. Петро та Дмитро 25 разів зіграли в камінь-ножиці-папір. Відомо, що Петро 11 разів показав камінь, 7 разів ножиці та 7 разів папір. Дмитро 13 разів показав камінь, 9 разів ножиці та 3 рази папір. Нічийїх не було. Хто з них переміг більше разів?

2. Додатні дійсні числа x, y, z задовольняють рівність $xy + yz + zx = 1$. Доведіть, що

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{z^2 + 1} \right) \geq 5.$$

3. Знайдіть усі натуральні m та прості p , які задовольняють рівність $(m - p)^3 = m + p$.

4. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кути A та C – гострі та рівні один одному, а $\angle BDC = 90^\circ$. Точка M – середина AC . Доведіть, що $DM \perp AB$.