

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2023 рік. 8 клас. 3 тур

1. Петро та Дмитро 25 разів зіграли в камінь-ножиці-папір. Відомо, що Петро 11 разів показав камінь, 7 разів ножиці та 7 разів папір. Дмитро 13 разів показав камінь, 9 разів ножиці та 3 рази папір. Нічийїх не було. Хто з них переміг більше разів?

2. Назвемо натуральне число n *завзятим*, якщо воно має хоча б один непарний простий дільник, та виконується наступна умова: для будь-яких p і q , що є простими дільниками числа n (можливо, $p = q$), число $p + q$ є дільником числа n . Доведіть, що всі завзяті числа діляться на найменше завзяте число.

3. Розв'яжіть у дійсних числах систему

$$\begin{cases} 2x(x + y) = 4z - 1, \\ 2y(y + z) = 4x - 1, \\ 2z(z + x) = 4y - 1. \end{cases}$$

4. Задано нерівнобедрений трикутник ABC . Точку P вибрано на промені AC таким чином, що $AP = BP$. Точку Q вибрано на промені AB таким чином, що $AQ = CQ$. Точки R та S на прямій BC такі, що $AR = CR$ та $BS = AS$. Доведіть, що точки P, Q, R, S належать одному колу.