

## Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2023 рік. 10 клас. 3 тур

1. Рома має  $n$  карток, на яких написано числа  $1, 2, \dots, n$ . Він виклав усі картки на столі в ряд в довільному порядку. Далі Рома збирається забирати картки зі стола. Спершу він забере картку з числом 1, потім з числом 2, наступну з числом 3 і так далі. До того, як Рома почне забирати картки зі стола, Олексій хоче пофарбувати картки у червоний, жовтий та зелений кольори так, щоб у будь-який момент часу виконувалася наступна умова: між будь-якими двома однокольоровими картками на столі залишилася принаймні одна картка іншого кольору. Доведіть, що Олексій зможе вибрати розфарбування потрібним чином. (Олексій бачить, в якому порядку картки розкладені на столі на початку).

2. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння  $a! + 1 = (a + 1)^n$ .

3. Дано рівнобедрений трикутник  $ABC$ ,  $AB = AC$ . Медіани  $AM$  і  $BN$  перетинаються в точці  $G$ . Точка  $K$  – середина  $GN$ . Доведіть, що  $GK = GM$  тоді і лише тоді, коли чотирикутник  $CNKM$  – вписаний.

4. Задано додатні дійсні числа  $a, b, c$  такі, що  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$ . Доведіть, що

$$\frac{\sqrt{a + \frac{b}{c}} + \sqrt{b + \frac{c}{a}} + \sqrt{c + \frac{a}{b}}}{3} \leq \frac{a + b + c - 1}{\sqrt{2}}.$$