

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2022 рік. 8 клас. 3 тур

1. На стороні BC опуклого чотирикутника $ABCD$ відмічено точку P . Виявилось, що описані кола трикутників PAB і PCD дотикаються до прямої AD . При цьому $\angle BAP = \angle PDC = 30^\circ$. Знайдіть величину кута APD .
2. Знайдіть усі натуральні n , для яких число $n \cdot 2^n + 4$ є точним квадратом.
3. Учитель написав на дошці 10 від'ємних цілих чисел. Тарас переписав у зошит ці числа, потім у той же зошит записав усі можливі їхні попарні добутки, усі можливі добутки по три числа, чотири числа, . . . , дев'ять чисел і, нарешті, добуток усіх десяти чисел. Виявилось, що сума всіх чисел, записаних Тарасом, від'ємна. Чому вона може дорівнювати?
4. Задано правильний n -кутник. Двоє грають у наступну гру: по черзі фарбують по одній вершині многокутника в синій та жовтий колір. Колір гравці щоразу обирають на свій розсуд, двічі фарбувати одну й ту саму вершину не можна. Перший гравець виграє, якщо в кінці знайдуться три однокольорові вершини, що йдуть посліпль. У протилежному випадку виграє другий. Визначте, хто перемагає за правильної гри, якщо: а) $n = 2021$; б) $n = 2022$; в) $n = 2023$.