

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2022 рік. 11 клас. 3 тур

1. На стороні AD опуклого чотирикутника $ABCD$ з гострим кутом B відмічена точка E . Відомо, що $\angle CAD = \angle ADC = \angle ABE = \angle DBE$. Доведіть, що $BE + CE < AD$.

2. Розв'яжіть у дійсних числах систему:
$$\begin{cases} xy + 1 = z^2, \\ yz + 2 = x^2, \\ zx + 3 = y^2. \end{cases}$$

3. Чи існує таке натуральне число n , що $6^n - 1$ має рівно n натуральних дільників?

4. На вечірці прийшло $n \geq 3$ гостей. Деякі з них знайомі один з одним, але відомо, що на вечірці немає таких чотирьох гостей A, B, C, D , що у парах (A, B) , (B, C) , (C, D) , (D, A) люди знають один одного, а у парах (A, C) та (B, D) – ні. Непорожню множину гостей X назвемо *повною*, якщо всі гості в X знайомі один з одним, але жодного з гостей, що не входять до X , не можна додати до X так, щоб ця умова все ще виконувалася. Доведіть, що на вечірці можна знайти не більше $\frac{n(n-1)}{2}$ різних повних множин.