

## Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2022 рік. 10 клас. 3 тур

1. На столі лежать 63 камінця, кожен з яких важить більше 100 грамів, але менше 110 грамів. Ці камінці розподілили на три купки. Доведіть, що з цих трьох купок можна вибрати дві таким чином, щоб в одній купці одночасно і кількість камінців, і їхня сумарна вага були не менші, ніж кількість камінців і сумарна вага відповідно в другій купці.
2. Петро записав на дошці 7 від'ємних цілих чисел. Таня переписала ці числа собі в зошит. Потім туди ж записала всі можливі попарні добутки цих чисел, всі можливі добутки трьох, чотирьох, п'яти, шести з цих чисел, і, нарешті, добуток усіх семи чисел. Доведіть, що сума чисел у Тані в зошиті від'ємна.
3. Два нерівних кола  $\omega_1$  та  $\omega_2$  дотикаються в точці  $X$  зовнішнім чином. Спільна дотична  $AC$  дотикається до кола  $\omega_1$  в точці  $A$  та кола  $\omega_2$  в точці  $C$ , а спільна дотична  $BD$  – в точках  $B$  і  $D$  відповідно. Пряма  $CX$  перетинає пряму  $AB$  в точці  $E$  та вдруге перетинає коло  $\omega_1$  у точці  $F$ . Описане коло трикутника  $EFB$  вдруге перетинає пряму  $AF$  у точці  $G$ . Прямі  $AX$  та  $CD$  перетинаються в точці  $H$ . Доведіть, що точки  $E, G, H$  лежать на одній прямій.
4. Задано натуральне число  $n > 2$ . Доведіть, що існують такі  $n$  натуральних чисел, що добуток будь-яких  $n - 1$  з них дає остачу 1 при діленні на число, що залишилося.