

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2023 рік. 9 клас. 2 тур

1. Знайдіть усі натуральні n , для яких число $n^2 + 7n + 2$ є добутком декількох (принаймні двох) послідовних натуральних чисел.
2. Нехай задано натуральне число n . Знайдіть найбільше натуральне k (в залежності від n), для якого виконується наступна властивість: для будь-якого набору з $3n$ різних точок на площині, такого що жодні k точок не лежать на одній прямій, ці точки можна розфарбувати у n кольорів, по три точки кожного кольору так, щоб точки одного кольору не лежали на одній прямій.
3. Чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло ω , причому AC є діаметром кола ω . Точка E на відрізку BC така, що $\angle CAD = \angle EAB$. Нехай M – це середина EC . Доведіть, що $BM = DM$.
4. Додатні числа x, y, z задовольняють рівність $xyz(x + y + z) = 3$. Доведіть нерівність

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8.$$