

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2023 рік. 10 клас. 2 тур

1. Знайдіть усі натуральні n , для яких число $n^2 + 7n + 2$ є добутком декількох (принаймні двох) послідовних натуральних чисел.
2. Василько записує на дошку раціональні числа. На початку дошка порожня. За один хід він може або записати на дошку будь-яке раціональне число з проміжку $[2022, 2023]$, або записати на дошку число p/q , якщо числа p та q вже записані на дошці. Доведіть, що за допомогою таких операцій Василько зможе отримати на дошці будь-яке додатне раціональне число.
3. Прямокутник $m \times n$ розбито деяким чином на прямокутники 2×2 та 1×3 . Для будь-яких двох різних за розміром прямокутників розбиття, що мають спільний відрізок межі, цей відрізок пофарбовано в жовтий колір. Доведіть, що сума довжин усіх жовтих відрізків парна.
4. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AA_1 та BB_1 . Нехай CD – це діаметр описаного кола трикутника ABC . Прямі A_1D і B_1D вдруге перетинають описане коло трикутника ABC у точках X і Y відповідно. Доведіть, що прямі AB , A_1B_1 та XY перетинаються в одній точці.