

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2022 рік. 11 клас. 2 тур

1. У Пончика є необмежений запас цукерок дев'яти видів: виду 1, виду 2, ..., виду 9. Сиропчик взяв кілька цукерок у Пончика і виклав їх у ряд. Пончик може робити з цукерками в ряду наступні операції:

1) З'їсти цукерку виду k і покласти у рядок на її місце цукерки виду $k-1$ і $k+1$ саме в такому порядку. На місце 1 кладуть 9 та 2, а на місце 9 кладуть 8 та 1.

2) З'їсти дві сусідні цукерки, якщо вони одного виду.

Пончик вважає, що незалежно від того, як Сиропчик розклав цукерки спочатку, він зможе діяти так, щоб у ряду не залишилося жодної цукерки. Чи правий Пончик?

2. Назвемо чотирицифрове число *миготливим*, якщо воно має вигляд \overline{abab} , де a і b – цифри ($a \neq 0$). Наприклад, числа 2020, 2021, 2222 є миготливими, а 2002 чи 0202 – ні. Знайдіть усі миготливі числа, які на одиницю більші за квадрат деякого натурального числа.

3. Всередині трикутника ABC відмічено точки P та Q , причому $\angle PAB = \angle CAQ$ і $\angle PCA = \angle QCB$. Бісектриса кута B перетинає прямі PA і PC в точках K і L відповідно, а описане коло трикутника ABC – в точці M . Описані кола трикутників AMK та CML вдруге перетинаються в точці N . Доведіть, що точки M , Q та N лежать на одній прямій.

4. Знайдіть усі такі функції $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, що для будь-яких натуральних чисел m і n виконується нерівність

$$m^2 + f(n)^2 + (m - f(n))^2 \geq f(m)^2 + n^2.$$