

## Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2022 рік. 10 клас. 2 тур

1. Михайло називає пару натуральних чисел  $(m, n)$  *неприємною*, якщо число  $17m + 43n$  ділиться на  $m - n$ . Михайло хоче вибрати декілька натуральних чисел, що не перевищують 2022, таким чином, щоб жодні два обраних числа не утворювали неприємну пару. Яку найбільшу кількість чисел зможе вибрати Михайло?

2. У трикутнику  $ABC$  з  $AB < BC$  точка  $O$  є центром описаного кола, а  $D$  і  $E$  – серединами відрізків  $AB$  і  $AC$  відповідно. Пряма  $OE$  перетинає  $BC$  у точці  $K$ , а описане коло трикутника  $OKB$  вдруге перетинає пряму  $OD$  у точці  $L$ . Нехай  $F$  – це основа перпендикуляра, опущеного з точки  $A$  на пряму  $KL$ . Доведіть, що точка  $F$  лежить на прямій  $DE$ .

3. У Миколи є сейф, код до якого складається з  $n$  цифр, кожна з яких – 0 або 1, але Микола його не пам'ятає. Спочатку було введено послідовність, що повністю складається з нулів, але сейф залишився закритим (тобто послідовність з нулів не є правильним кодом). За одну спробу Микола може ввести послідовність з  $n$  цифр, кожна з яких – 0 або 1. Якщо ця послідовність збігається з кодом, то сейф відкривається. Якщо ж введена послідовність співпадає з кодом в більшій кількості позицій, ніж попередня введена Миколою послідовність, то сейф клацає. В інших випадках сейф залишається закритим і клацання не чути. За яку найменшу кількість спроб Микола гарантовано може відкрити сейф?

4. Для додатних чисел  $a, b$  і  $c$ , які задовольняють рівність  $ab + bc + ac = a + b + c$ , доведіть нерівність:

$$\sqrt{a + \frac{b}{c}} + \sqrt{b + \frac{c}{a}} + \sqrt{c + \frac{a}{b}} \leq \sqrt{2} \cdot \min \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right\}.$$