

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2023 рік. 9 клас. 1 тур

1. Дійсні числа u, v, w, x, y, z є такими, що число $u(v + w + x + y - z)$ від'ємне, а число $z(u - v - w - x - y)$ додатне. Доведіть, що число uz додатне.
2. У трикутнику ABC вписане коло дотикається до сторони AB в точці D . Вписане коло трикутника ADC дотикається до сторони AD в точці P і до сторони AC в точці Q . Вписане коло трикутника BDC дотикається до сторони BC в точці M і до сторони BD в точці N . Доведіть, що точки P, Q, M, N лежать на одному колі.
3. У Миколи є дошка 3000×3000 . Він хоче вирізати з цієї дошки по клітинках прямокутну дірку (сторони прямокутника мають бути паралельні сторонам дошки, сам прямокутник не має дотикатися до сторін дошки), а потім розставити на дошці якомога більшу кількість тур, які не б'ють одна одну (вважаємо, що тури не б'ють крізь дірку). Яку найбільшу кількість тур зможе розставити Микола, якщо він сам обирає, яку дірку йому вирізати?
4. Задано просте число p . Доведіть, що існує нескінченно багато таких натуральних n , що $2^{3^n} - n$ ділиться на p .