

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2023 рік. 8 клас. 1 тур

1. На контрольній роботі було 25 завдань трьох типів: прості (по 2 бали), середні (по 3 бали) і складні (по 5 балів). Правильний розв'язок задачі оцінювався вказаною кількістю балів відповідно до складності, неправильний розв'язок оцінювався в нуль балів (проміжних балів не ставили). Відомо, що максимально можлива оцінка складала 84 бали. Марко правильно розв'язав усі прості задачі, рівно половину середніх та рівно третину складних. Скільки балів міг отримати Марко за свою роботу?

2. Бісектриса кута B гострокутного трикутника ABC перетинає його описане коло в точці W . Пряма, що проходить через W паралельно BC , перетинає сторони AB і AC в точках L і K відповідно. Виявилось, що точки L і K рівновіддалені від середини сторони BC . Доведіть, що $AL = KW$.

3. Компанія з декількох хлопців та дівчат зібрала в лісі відро суниць. Вони зайшли в хату та вирішили поділити ягоди приблизно порівну наступним чином. Кожен з них по черзі підходить до відра, ділить кількість суниць, що знаходиться у відрі на даний момент, на кількість людей, що знаходяться в хаті на даний момент (включно із собою), округлює результат (якщо вийшло неціле число), забирає отриману кількість суниць і виходить на вулицю їх їсти. При цьому хлопці завжди округлюють вгору, а дівчата – вниз. Доведіть, що сумарна кількість суниць, які отримують у результаті процесу хлопці, не залежить від порядку, в якому хлопці та дівчата підходили до відра.

4. Знайдіть усі четвірки натуральних чисел (p, q, m, n) такі, що числа p, q – прості, $m > 1$ та виконується рівність:

$$p^m = 1 + 5q^n.$$