

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2023 рік. 11 клас. 1 тур

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = y^6, \\ \sin^2 y + \cos^2 x = x^2. \end{cases}$$

2. Нехай O – це центр описаного кола нерівнобедреного гострокутного трикутника ABC , а AD – висота. Прямі BC та AO перетинаються в точці E . Пряма s проходить через E перпендикулярно AO і перетинає AB та AC у точках K і L відповідно. Нехай ω – це описане коло трикутника AKL . Пряма AD перетинає ω вдруге у точці X . Доведіть, що ω та описані кола трикутників ABC і DEX мають спільну точку.

3. У турнірі з бадмінтону взяли участь n гравців, де n - непарне натуральне число. Кожні два гравці зіграли між собою по два матчі. Виявилось, що нічийх не було, і кожен гравець виграв стільки ж матчів, скільки програв. Доведіть, що можна скасувати рівно половину матчів так, щоб у кожного гравця серед скасованих ігор було порівну перемог і поразок.

4. Послідовність натуральних чисел $\{x_n\}$ задано наступним чином: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ та $x_{n+2} = x_n(x_{n+1} + 1)$ при $n \geq 1$. Доведіть, що x_{x_n} ділиться на $(x_n)^n$ при $n \geq 200$.