

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2023 рік. 10 клас. 1 тур

1. Попарно різні дійсні числа a, b, c, d, e задовольняють систему

$$\begin{cases} ab + b = ac + a, \\ bc + c = bd + b, \\ cd + d = ce + c, \\ de + e = da + d. \end{cases}$$

Доведіть, що $abcde = 1$.

2. Задано гострокутний трикутник ABC , у якому $AB < AC$. Бісектриса кута BAC перетинає сторону BC та описане коло трикутника ABC у точках L і W відповідно. Точки P та Q обрано таким чином, що $WP \perp AB$, $BP \perp WB$, $WQ \perp AC$ і $CQ \perp WC$. Доведіть, що точки P , Q і L лежать на одній прямій.

3. Задано просте число p . Доведіть, що існує нескінченно багато таких натуральних n , що $2^{3^n} - n$ ділиться на p .

4. У шкільний табір приїхало 337 дітей. По приїзді їм роздали по футболці одного з семи типів, по худі одного з семи типів та по ручці одного з семи типів. Виявилось, що двоє дітей подружилися в тому і лише тому випадку, коли у них співпали типи рівно двох з трьох виданих речей. Доведіть, що злий вихователь може поселити в один корпус 49 дітей так, щоб серед них не було жодної пари друзів.