

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2022 рік. 9 клас. 1 тур

1. Задано $n > 2$ цілих чисел, відмінних від 0. Відомо, що кожне з цих чисел ділиться на суму решти $n - 1$ чисел. Доведіть, що сума всіх n чисел дорівнює 0.
2. У класі навчаються 30 учнів. Учитель фізкультури знає, що серед будь-яких 7 з них є двоє учнів, що товаришують. Доведіть, що вчитель може вишикувати всіх учнів не більше ніж у 6 шеренг таким чином, щоб кожні два учні, що стоять поруч у шерензі, товаришували. Шеренга може складатися з одного учня.
3. Додатні числа a, b і c задовольняють умову $a + b + c = 1$. Доведіть, що

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \geq \frac{7}{1+abc}.$$

4. Навколо трикутника ABC описане коло ω . Точки K, L і M відмічено на сторонах AB, BC і CA відповідно таким чином, що $CM \cdot CL = AM \cdot BL$. Промінь LK перетинає пряму AC в точці P . Спільна хорда ω та описаного кола трикутника KMP перетинає відрізок AM у точці S . Доведіть, що $SK \parallel BC$.