

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2022 рік. 11 клас. 1 тур

1. Дійсні числа x_1, x_2, \dots, x_{30} задовольняють рівності

$$\begin{cases} 20^3 x_1 + 21^3 x_2 + \dots + 49^3 x_{30} = 13, \\ 21^3 x_1 + 22^3 x_2 + \dots + 50^3 x_{30} = 1, \\ 22^3 x_1 + 23^3 x_2 + \dots + 51^3 x_{30} = 19. \end{cases}$$

Яких значень може набувати вираз $21x_1 + 22x_2 + \dots + 50x_{30}$?

2. Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ перетинає діагональ AC у точці E , а зовнішня бісектриса кута B перетинає пряму AD у точці F . Нехай M – це середина відрізка BE . Доведіть, що прями CM та EF є паралельними.

3. Нехай $n \geq 3$ – натуральне число. План міста має вигляд прямокутника $3 \times (n - 1)$, вулицям міста відповідають лінії сітки, а перехрестям відповідають вузли сітки (всього $4n$ перехресть). Будемо називати перехрестя крайнім, якщо воно знаходиться на межі прямокутника $3 \times (n - 1)$. Комунальна служба закрила найменшу можливу кількість перехресть на ремонт таким чином, що в місті більше не існує замкнутого маршруту по вулицях. Скільки крайніх перехресть могли виявитися закритими?

4. Знайдіть усі пари простих чисел (p, q) , для яких $1 + \frac{p^q - q^p}{p + q}$ є простим числом.