

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2022 рік. 10 клас. 1 тур

1. Знайдіть усі пари дійсних чисел (x, y) , що задовольняють рівність

$$2x^2 + y^2 + 7 = 2(x + 1)(y + 1).$$

2. На столі стоять 50 зовні однакових гир різної маси. Вони важать 51 г, 52 г, 53 г, ..., 99 г та 100 г. У Тараса є нечутливі двощалькові терези. На кожну з шальок можна покласти лише по одній гирі. Терези покажуть, яка з гир важча, тільки якщо різниця між їхньою вагою більша за k грамів, інакше терези покажуть рівність. Для якого найбільшого натурального k Тарас гарантовано зможе дізнатися вагу кожної з гир на столі?

3. Гриць виписав на дошці 1000 послідовних натуральних чисел. Кожну хвилину він довільним чином розбиває написані на дошці числа на пари, та замість кожної з пар записує суму та різницю чисел цієї пари (не обов'язково від більшого числа віднімати менше; всі заміни проходять одночасно). Доведіть, що Гриць більше ніколи не зможе отримати на дошці 1000 послідовних натуральних чисел.

4. Вписане коло трикутника ABC дотикається його сторін AB , BC та AC у точках M , N та P відповідно. На стороні BC обрано точку K так, що MN є бісектрисою кута CMK . Нехай точка Q така, що K – це середина MQ . Доведіть, що $\angle PNM = \angle QNK$.