Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LXI Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

«Якщо існує штучний інтелект,
то має існувати і штучна тупість»

11 клас

11–1. Відомо, що для деяких цілих чисел $a_{2021}, a_{2020}, \ldots, a_1, a_0$ вираз

$$a_{2021}n^{2021} + a_{2020}n^{2020} + \ldots + a_1 n + a_0$$

ділиться націло на 2021 для довільного цілого числа n. Чи обов'язково кожне з чисел $a_{2021}, a_{2020}, \ldots, a_1, a_0$ також ділиться націло на 2021?

11–2. Знайдіть усі натуральні $n \geq 3$, для яких у довільному n-кутнику можна обрати 3 вершини, що ділять його межу на три частини, довжини яких є довжинами сторін деякого трикутника.

11–3. Нехай у трикутнику ABC точки O, I та H відповідно – центри описаного та вписаного кіл і ортоцентр. Прямі AI та AH вдруге перетинають описане коло ΔABC у точках D та E відповідно. Доведіть, що якщо $OI || BC$, то центр описаного кола ΔOIH лежить на прямій DE.

11–4. Знайдіть усі такі функції $f: R \to R$, що для довільних дійсних x, y справджується рівність:

$$f(xf(x+y)) + f\big((x+y)f(y)\big) = (x+y)^2.$$

1 квітня 2021 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LXI Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

«Оптиміст не може бути приємно здивованим».
Формула Мерфі

11 клас

11–5. Чи існують натуральні числа (m, n, k), що задовольняють рівності: $m^m + n^n = k^k$?

11–6. У трикутнику ABC провели висоти AA_1, BB_1 та CC_1. Точка K – проекція точки B на A_1C_1. Доведіть, що сімедіана ΔABC з вершини B ділить відрізок B_1K навпіл.
Сімедіана – це чевіана трикутника, промінь якої симетричний променю медіани щодо бісектриси кута, проведеної з тієї ж вершини.

11–7. Дано натуральне число n. Доведіть, що можна обрати $\varphi(n) + 1$ (не обов'язково різних) дільників n з сумою n.
Тут $\varphi(n)$ позначає кількість натуральних чисел, менших n, що є взаємно простими з n.

11–8. Є 101 не обов'язково різні гирі, кожна з яких важить цілу кількість грамів від 1г до 2020г. Відомо, що при будь-якому розбитті цих гир на дві купи, сумарна вага принаймні однієї з куп не більше 2020г. Яку найбільшу кількість грамів можуть важити усі 101 гирі?

2 квітня 2021 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів