Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LXI Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

«Якщо існує штучний інтелект,
то має існувати і штучна тупість»

10 клас

10–1. Олексій і Богдан грають у гру з двома купами камінців. На початку одна з куп містить 2021 камінець, а друга – порожня. За один хід кожний з хлопців має забрати парну кількість каменів (більше нуля) з довільної купи, після чого перекласти половину із взятих камінців до іншої купи, а другу половину – вилучити з гри. Програє той, хто не може зробити хід. Хто переможе у цій грі, якщо обидва прагнуть перемогти, а починає Богдан?

10–2. Позначимо через $P^{(n)}$ множину всіх многочленів n -го степеня, коефіцієнти яких є перестановкою набору чисел $\{2^0, 2^1, \dots, 2^n\}$. Знайдіть усі пари натуральних чисел (k, d), для яких існує таке n, що для будь-якого многочлена $P \in P^{(n)}$ число $P(k)$ ділиться націло на число d.

10–3. Для довільних додатних чисел $a \geq b \geq c$ доведіть нерівність:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{a^2+c^2}{a+c}+\frac{c^2+b^2}{c+b} \geq (a+b+c)+\frac{(a-c)^2}{a+b+c}.$$

10–4. Нехай у трикутнику ABC точки O, I та H відповідно – центри описаного та вписаного кіл і ортоцентр. Прямі AI та AH вдруге перетинають описане коло ΔABC у точках D та E відповідно. Доведіть, що якщо $OI || BC$, то центр описаного кола ΔOIH лежить на прямій DE.

1 квітня 2021 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LXI Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

«Оптиміст не може бути приємно здивованим».
Формула Мерфі

10 клас

10–5. Знайдіть усі набори з $n \geq 2$ послідовних цілих чисел $\{a + 1, a + 2, \ldots, a + n\}$, де $a \in \mathbf{Z}$, в яких одне з чисел дорівнює сумі усіх інших.

10–6. Кола w_1 та w_2 перетинаються в точках P і Q та дотикаються до кола w з центром у точці O внутрішнім чином у точках A та B відповідно. Відомо, що точки A, B та Q лежать на одній прямій. Доведіть, що точка O лежить на зовнішній бісектрисі $\angle APB$.

10–7. Послідовність a_1, a_2, …, a_{2n} цілих чисел така, що кожне число зустрічається в ній не більше n разів. Доведіть, що існують дві строго зростаючі послідовності індексів b_1, b_2, …, b_n і c_1, c_2, …, c_n такі, що кожне натуральне число з множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ зустрічається рівно в одній з цих двох послідовностей, і для кожного $1 \leq i \leq n$ справджується умова: $a_{b_i} \neq a_{c_i}$.

10–8. Дано натуральне число n. Доведіть, що можна обрати $\varphi(n) + 1$ (не обов'язково різних) дільників n з сумою n.
Тут $\varphi(n)$ позначає кількість натуральних чисел, менших n, що є взаємно простими з n.

2 квітня 2021 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів