

**IV етап Всеукраїнської
олімпіади з математики
2023 рік**

Перший день

9 клас

9–1. По колу розставлено $n \geq 4$ дійсних чисел. Відомо, що для будь-яких чотирьох послідовних чисел a, b, c, d , що йдуть по колу в указаному порядку, справджується умова $a + d = b + c$. Для яких n можна зробити висновок, що всі числа рівні?

9–2. Натуральні числа a_1, a_2, \dots, a_{101} такі, що $a_i + 1$ ділиться на a_{i+1} для $1 \leq i \leq 101$ (вважаємо, що $a_{102} = a_1$). Яке найбільше значення може приймати максимальне з цих чисел?

9–3. Дано гострокутний трикутник ABC з описаним колом ω . Точки F на AC , E на AB і P, Q на ω такі, що $\angle AFB = \angle AEC = \angle APE = \angle AQF = 90^\circ$. Доведіть, що прямі BC, EF і PQ перетинаються в одній точці.

9–4. Знайдіть найменше дійсне число C , для якого справджується така умова: для довільних різних натуральних чисел x, y виконується нерівність

$$\min \left\{ \left\{ \sqrt{x^2 + 2y} \right\}, \left\{ \sqrt{y^2 + 2x} \right\} \right\} < C.$$

Тут через $\{a\} \in [0; 1)$ позначена дробова частина числа a , тобто існує ціле число n , для якого справджується рівність $a = n + \{a\}$. Наприклад, $\{3.14\} = 0.14$.

**IV етап Всеукраїнської
олімпіади з математики
2023 рік**

Другий день

9 клас

9–5. Чи існують 10 чисел, не усі з яких однакові, кожне з яких дорівнює квадрату суми усіх інших чисел?

9–6. Всередині трикутника ABC існує така точка O , що $\angle BOC = 90^\circ - \angle BAC$. Промені BO та CO перетинають сторони AC та AB у точках K та L відповідно. Точки K_1 та L_1 вибрані на відрізках LC та BK відповідно так, що $BK_1 = K_1K$ та $CL_1 = L_1L$. Нехай M – середина сторони BC . Доведіть, що $\angle K_1ML_1$ – прямий.

9–7. Дано $n \geq 2$ попарно різних натуральних чисел. Назвемо пару чисел *витонченою*, якщо їх сума є натуральним степенем двійки. Для кожного n знайдіть найбільшу можливу кількість *витончених* пар.

9–8. Яка найбільша кількість ребер може бути в графі на $2n$ вершинах, якщо існує рівно один спосіб розбити його вершини на n пар таким чином, що в кожній парі вершини з'єднані ребром?