IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

Перший день

8 клас

8–1. Олексій розставив натуральні числа у клітинках шахівниці 8×8. Федір для кожної пари сусідніх по стороні клітин записав добуток чисел, що стоять в них, і усі отримані числа додав. Олексій для кожної пари сусідніх по стороні клітин записав суму чисел, що стоять в них, після чого всі ці числа перемножив. Виявилось, що обидва числа мають останню цифру 1. Доведіть, що принаймні один з хлопчиків помилився при підрахунку. Наприклад, для квадрату 3×3 та вказаної розстановки чисел (рис. 1), Федір би виписав такі числа: $2, 6, 8, 24, 15, 35, 2, 6, 8, 20, 18, 42$ і їхня сума закінчується цифрою 6; Олексій би виписав такі числа: $3, 5, 6, 10, 8, 12, 3, 5, 6, 9, 9, 13$ і їхній добуток закінчується цифрою 0.

1	2	3
2	4	6
3	5	7

Рис. 1

8–2. В деякій країні пройшов одноколовий тенісний турнір. За перемогу в матчі учасники отримували 1 очко, за поразку – 0, нічиїх в тенісі не буває. Після закінчення турніру Олексій побачив кількість очок, що набрав кожний учасник, а також розклад усіх матчів цього турніру, де були вказані пари гравців, але не вказані переможці. Він по черзі у довільному порядку обирає матч та намагається вгадати переможця, після чого йому кажуть чи він правий. Доведіть, що Олексій може діяти так, щоб гарантовано вгадати переможців більше ніж половини матчів.

8–3. Натуральні числа x, y задовольняють умови:

$$\left\{\sqrt{x^2+2y}\right\} > \frac{2}{3}, \left\{\sqrt{y^2+2x}\right\} > \frac{2}{3}.$$

Доведіть, що $x = y$.

Тут через $\{a\} \in [0; 1)$ *позначена дробова частина числа* a, *тобто існує ціле число* n, *для якого справджується рівність* $a = n + \{a\}$. *Наприклад,* $\{3.14\} = 0.14$.

8–4. Нехай для ромба $ABCD$ існує така точка T, що справджуються умови: $\angle ATC + \angle BTD = 180°$ та описані кола трикутників ATC та BTD дотикаються одне одного. Доведіть, що точка T рівновіддалена від діагоналей ромба.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2023 рік

Другий день

8 клас

8–5. Чи існують 10 чисел, не усі з яких однакові, кожне з яких дорівнює квадрату суми усіх інших чисел?

8–6. В опуклому п’ятикутнику $ABCDE$ виконуються такі умови: $AB \parallel CD, BC \parallel DE$ та $\angle BAE = \angle AED$. Доведіть, що $AB + BC = CD + DE$.
П’ятикутник називається опуклим, якщо його діагоналі розташовані всередині п’ятикутника.

8–7. В країні $n \geq 3$ аеропортів, деякі пари з яких з'єднані двосторонніми авіарейсами. Кожного дня уряд закриває аеропорт з якого літає строго найбільша кількість авіарейсів. Яку найбільшу кількість днів це може продовжуватись?

8–8. Задана множина з m натуральних чисел таких, що всі вони дають різні остачі при діленні на деяке натуральне число n. Доведіть, що для будь-якого натурального $k \leq m$ дану множину можна розбити на k непустих підмножин таким чином, що суми чисел в даних підмножинах також попарно різні по модулю n.