

**IV етап Всеукраїнської  
олімпіади з математики  
2023 рік**

Перший день

**11 клас**

**11–1.** Множина  $M$  містить  $n \geq 2$  натуральних чисел. Відомо, що для будь-яких двох різних чисел  $a, b \in M$  число  $a^2 + 1$  ділиться на  $b$ . Знайдіть найбільше можливе значення числа  $n$ .

**11–2.** На площині задано 2022 точок  $A_1, A_2, \dots, A_{2022}$ , жодні три з яких не лежать на одній прямій. Розглянемо всі кути  $A_i A_j A_k$  для трійок попарно різних точок  $A_i, A_j, A_k$ . Яка найбільша кількість з них може бути прямими?

**11–3.** В чотирикутнику  $ABCD$   $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ . Позначимо  $P = AC \cap BD$ ,  $Q = AB \cap CD$ ,  $R = AD \cap BC$ . Нехай  $l$  – середня лінія трикутника  $PQR$ , паралельна  $QR$ . Доведіть, що описане коло трикутника, утвореного прямими  $AB$ ,  $AD$  і  $l$  дотикається описаного кола трикутника, утвореного прямими  $CD$ ,  $CB$  і  $l$ .

**11–4.** Знайдіть усі такі функції  $f: R \rightarrow R$ , що для довільних дійсних  $x, y$  справджується рівність:

$$f(x + yf(x + y)) = f(y^2) + xf(y) + f(x).$$

**IV етап Всеукраїнської  
олімпіади з математики  
2023 рік**

Другий день

**11 клас**

**11–5.** Назвемо многочлен *мішаним*, якщо він має як додатні так і від'ємні коефіцієнти (нуль ми не рахуємо ні додатнім ні від'ємним). Чи правда, що добуток двох мішаних многочленів завжди є мішаним многочленом?

**11–6.** Нехай  $K$  – середина медіани  $AM$  трикутника  $ABC$ . На стороні  $AB$  знайшлася така точка  $X$ , що  $\angle KXM = \angle ACB$  та  $AX > BX$ , а на стороні  $AC$  знайшлася така точка  $Y$ , що  $\angle KYM = \angle ABC$  та  $AY > CY$ . Доведіть, що точки  $B, X, C, Y$  лежать на одному колі.

**11–7.** Для натурального числа  $n$  випишемо усі його дільники  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ . Дільник  $d_i$  назвемо *гарним*, якщо  $d_{i-1}d_{i+1}$  не ділиться на  $d_i$ ,  $2 \leq i \leq k - 1$ . Знайдіть всі  $n$ , у яких гарних дільників менше ніж кількість різних простих дільників.

**11–8.** У країні 2024 міст, кожен два з яких з'єднані в обидва боки рівно одним з трьох видів транспорту – залізницею, повітряним сполученням чи автомобільним шляхом. У цю країну приїхав турист, який має усю транспортну схему. Він обирає проїзний квиток на один з видів транспорту та місто з якого розпочинає подорож. Він хоче відвідати якомога більше міст, але користуючись лише проїзним на вказаний тип транспорту. Яку кількість міст гарантовано може відвідати турист? Протягом маршруту він може повертатися в міста, яких вже побував.