

**IV етап Всеукраїнської
олімпіади з математики
2023 рік**

Перший день

10 клас

10–1. Дано натуральне число k . Добуток деяких k послідовних натуральних чисел закінчується на число k . Яке значення може приймати число k ?

10–2. На прямокутній дошці 100×300 двоє по черзі зафарбовують ще не зафарбовані клітинки. Перший у жовтий колір, другий – у синій. Фарбування завершується, коли буде зафарбована кожна клітинка дошки. *Послідовністю* клітин називається сукупність клітинок, в якій дві послідовні клітини мають спільну сторону (усі клітинки в послідовності різні). Розглядаємо усі можливі послідовності жовтих клітин. *Результатом* першого гравця назвемо кількість клітинок у послідовності жовтих клітинок максимальної довжини. Мета першого гравця отримати максимальний результат, а мета другого гравця – зробити результат першого гравця якомога меншим. Доведіть, що якщо кожний прагне досягти своєї цілі, то результат першого гравця буде не більше 200.

10–3. Нехай I – центр вписаного у трикутник ABC кола, а P – довільна точка, що взята на дузі BAC його описаного кола. На дотичній до описаного кола ω трикутника API в точці I взяли точки K та L так, що $BK = KI$ та $CL = LI$. Доведіть, що описане коло трикутника PKL дотикається до ω .

10–4. Нехай (x_n) – послідовність дійсних чисел з проміжку $(0; 1)$. Послідовність натуральних чисел (a_n) визначається таким чином: $a_1 = 1$, $a_{i+1} = m$, де m – це найменше натуральне число, для якого $[x_1 + x_2 + \dots + x_m] = a_i$. Доведіть, що для будь-яких індексів i, j справджується нерівність $a_{i+j} \geq a_i + a_j$.

**IV етап Всеукраїнської
олімпіади з математики
2023 рік**

Другий день

10 клас

10–5. В опуклому п'ятикутнику $ABCDE$ виконуються такі умови: $AB \parallel CD$, $BC \parallel DE$ та $\angle BAE = \angle AED$. Доведіть, що $AB + BC = CD + DE$.

П'ятикутник називається опуклим, якщо його діагоналі розташовані всередині п'ятикутника.

10–6. Нехай $P(x)$, $Q(x)$ та $R(x)$ – многочлени з цілими коефіцієнтами, при цьому справджується рівність: $P(x) = Q(x)R(x)$. Позначимо через a та b максимальний з модулів коефіцієнтів многочленів $P(x)$ та $Q(x)$ відповідно. Чи обов'язково виконується умова $b \leq 2023a$?

10–7. Дано $n \geq 2$ попарно різних натуральних чисел. Для кожної пари $a < b$ цих чисел розглядається різниця $b - a$. Для кожної з цих різниць Влада записує степінь входження двійки в неї. Яку найбільшу кількість різних чисел могла виписати Влада?

10–8. Розглянемо повний граф на 4046 вершинах, ребра якого пофарбовані в якісь кольори. Називатимемо граф k -гарним, якщо всі вершини графу можна розбити на 2023 пари таким чином, що серед кольорів, у які пофарбовані 2023 ребер, що з'єднують вершини в парах, рівно k різних. Чи могло таке статись що граф 999-гарний та 1001-гарний, але не є 1000-гарним?