

11 клас

1. Удав повз по прямій стежці й біля пальми зустрів Папугу, що біг йому назустріч із втричі більшою швидкістю. Вони привіталися й продовжили свій рух далі стежкою. Опинившись біля хвоста Удава, Папуга схаменувся, що забув передати йому привіт від Мавпи. Він повернув назад і, рухаючись з тією ж швидкістю, повернувся до пальми, але на цей момент на рівні пальми була середина Удава. Вирішивши швидше наздогнати Удава, Папуга збільшив швидкість удвічі. Визначте, скільки кроків пройшов Папуга від моменту першої зустрічі з Удавом і до повернення до його голови, якщо відомо, що довжина Удава 300 см, а один крок Папуги дорівнює 0,9 см (довжина кроку Папуги не залежить від швидкості, з якою він йде). Відповідь обґрунтуйте.

2. Знайдіть усі значення параметра a , за яких система

$$\begin{cases} |x + 6| + 2|y| = 24, \\ |x + y| + |x - y| = 2a \end{cases}$$

має непарне число розв'язків. Відповідь обґрунтуйте.

3. Для кожного натурального n , позначимо за $f(n)$ суму всіх чисел, менших від n , що не є простими. Наприклад, $f(10) = 1 + 4 + 6 + 8 + 9 = 28$. Знайдіть усі натуральні n , які задовольняють рівність $f(n) = 1 + \frac{n^2}{4}$. Відповідь обґрунтуйте.

4. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) CH – висота. На промені CA відмічено точку N таку, що $CA = AN$. Нехай ω – описане коло трикутника AHN , γ – довільне коло, що проходить через точки C і H . Коло ω перетинає пряму BN у точках N та F . Коло γ перетинає пряму CF у точках C і P та перетинає коло ω у точках H та Q . Доведіть, що точки A , P , Q лежать на одній прямій.

5. У парку ростуть 23 дуби, що розташовані по колу. Вони є місцем проживання для 22 синичок, яких місцеві орнітологи пронумерували числами від 1 до 22. Одного сонячного дня синички вирішили влаштувати шоу для відвідувачів парку. Спочатку вони деяким чином розташувалися на гілках дубів (на одному дубі могло сидіти декілька синичок).

Потім кожну хвилину кожна синичка виконує «переліт»: синичка з номером k перелітає на k дубів вперед за годинниковою стрілкою (вважаємо, що перельоти виконуються одночасно та моментально). Доведіть, що існує деякий момент часу, коли принаймні на шести дубах не сиділо жодної синички.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 4 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися (починаючи з 31 січня) за тел. 707-52-70 та на сайті sites.google.com/view/kharkiv-math-olymp