

10 клас

1. Сергій їхав з Харкова до Києва на автобусі. В якийсь момент йому стало нудно, і він вирішив порахувати швидкість руху автобуса за допомогою стовпів, що стояли обабіч дороги та на яких була написана відстань до Харкова в кілометрах. Він помітив, що рівно опівдні автобус проїхав повз стовп з написом \overline{ab} , де a, b – деякі цифри. О 12:42 він проїхав повз стовп з написом \overline{ba} , а о 13:00 – повз стовп з написом $\overline{a0b}$. Допоможіть Сергію знайти швидкість автобуса, якщо відомо, що автобус їхав з постійною швидкістю. Відповідь обґрунтуйте.

2. Натуральні числа a, b і c утворюють арифметичну прогресію, причому $a < b < c$. Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = b(b - a)^2$. Яких значень може набувати число c ? Відповідь обґрунтуйте.

3. У гострокутному трикутнику ABC ($AB < BC$) проведено висоту VH . Точка P симетрична точці H відносно прямої, що проходить через середини сторін AC та BC . Доведіть, що пряма VP проходить через центр описаного кола трикутника ABC .

4. Андрій та Євген грають у наступну гру. Андрій ставить n тур на дошку $n \times n$ (тури можуть бити одна одну, а можуть і не бити). Євген не бачить дошку, але хоче знайти принаймні одну клітинку з турою. За один хід Євген може вказати деяку клітинку дошки. Якщо у цій клітинці стоїть тура, то Андрій повідомляє Євгену, що він знайшов клітинку з турою. Якщо ж у ній не стоїть тура, то Андрій повідомляє Євгену, чи знаходиться ця клітинка під боєм якоїсь з тур. За яку найменшу кількість ходів Євген гарантовано може знайти клітинку з турою? Відповідь обґрунтуйте.

5. Професор Срініваса побудував суперкомп'ютер для своїх обчислень. Суперкомп'ютер має екран, на якому відображається число та дві кнопки. Якщо натиснути на першу кнопку, то на екрані замість поточного числа x з'явиться число $x^2 - 2$, а якщо натиснути на другу, то замість поточного числа x з'явиться число $x^3 - 3x$. Скільки різних чисел професор може отримати на екрані суперкомп'ютера після 10 натискань, якщо на початку на екрані було число 2,5? Відповідь обґрунтуйте.

10 клас

1. Сергій їхав з Харкова до Києва на автобусі. В якийсь момент йому стало нудно, і він вирішив порахувати швидкість руху автобуса за допомогою стовпів, що стояли обабіч дороги та на яких була написана відстань до Харкова в кілометрах. Він помітив, що рівно опівдні автобус проїхав повз стовп з написом \overline{ab} , де a, b – деякі цифри. О 12:42 він проїхав повз стовп з написом \overline{ba} , а о 13:00 – повз стовп з написом $\overline{a0b}$. Допоможіть Сергію знайти швидкість автобуса, якщо відомо, що автобус їхав з постійною швидкістю. Відповідь обґрунтуйте.

2. Натуральні числа a, b і c утворюють арифметичну прогресію, причому $a < b < c$. Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = b(b - a)^2$. Яких значень може набувати число c ? Відповідь обґрунтуйте.

3. У гострокутному трикутнику ABC ($AB < BC$) проведено висоту VH . Точка P симетрична точці H відносно прямої, що проходить через середини сторін AC та BC . Доведіть, що пряма VP проходить через центр описаного кола трикутника ABC .

4. Андрій та Євген грають у наступну гру. Андрій ставить n тур на дошку $n \times n$ (тури можуть бити одна одну, а можуть і не бити). Євген не бачить дошку, але хоче знайти принаймні одну клітинку з турою. За один хід Євген може вказати деяку клітинку дошки. Якщо у цій клітинці стоїть тура, то Андрій повідомляє Євгену, що він знайшов клітинку з турою. Якщо ж у ній не стоїть тура, то Андрій повідомляє Євгену, чи знаходиться ця клітинка під боєм якоїсь з тур. За яку найменшу кількість ходів Євген гарантовано може знайти клітинку з турою? Відповідь обґрунтуйте.

5. Професор Срініваса побудував суперкомп'ютер для своїх обчислень. Суперкомп'ютер має екран, на якому відображається число та дві кнопки. Якщо натиснути на першу кнопку, то на екрані замість поточного числа x з'явиться число $x^2 - 2$, а якщо натиснути на другу, то замість поточного числа x з'явиться число $x^3 - 3x$. Скільки різних чисел професор може отримати на екрані суперкомп'ютера після 10 натискань, якщо на початку на екрані було число 2,5? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 4 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися (починаючи з 31 січня) за тел. 707-52-70 та на сайті sites.google.com/view/kharkiv-math-olymp

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 4 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися (починаючи з 31 січня) за тел. 707-52-70 та на сайті sites.google.com/view/kharkiv-math-olymp