

9 клас

1. Брати Артем та Олексій вирішили зняти смішний ролик для TikTok. Спочатку вони зняли, як кожен з них йде з дому до школи – Артем йшов 8 хвилин, а Олексій 5 хвилин. Повернувшись додому, вони сіли монтувати відео: вони запустили одночасно відео Артема з початку, а відео Олексія з кінця (у зворотному напрямку). У мить, коли на обох роликах брати опинилися в одному й тому ж місці дороги, вони склеїли обидва відео. У результаті брати отримали відео, в якому Артем йде із дому до школи, а потім у якусь мить перетворюється на Олексія і йде додому задом наперед. Ролик якої довжини отримали брати? Відповідь обґрунтуйте.

2. Розв'яжіть систему рівнянь: $[x] - y = 2[y] - z = 3[z] - x = \frac{2021}{2022}$.

Тут через $[a]$ позначено цілу частину a , тобто найбільше ціле число, що не перевищує a .

3. Нехай ω та Ω – два кола зі спільним центром O , причому ω лежить всередині Ω . На колі ω відмічено точки A, B такі, що хорда AB не є діаметром. Промінь AB перетинає коло Ω в точці C . Дотична до кола Ω в точці C та дотична до кола ω в точці A перетинаються в точці P . Пряма ℓ проходить через точку P та дотикається до Ω в точці D , відмінній від точки C . Доведіть, що пряма AP є бісектрисою кута CAD .

4. Знайдіть усі трійки натуральних чисел (a, b, c) , які задовольняють рівність

$$\text{НСК}(a, b) + \text{НСК}(a, c) + \text{НСК}(b, c) = \text{НСК}(a, b, c) + \text{НСД}(a, b, c).$$

5. На клітчастій площині живуть 20 їжачків. Кожен їжачок поділив кількість їжачків у своєму рядку на кількість їжачків у своєму стовпці (і там, і там їжачок враховує сам себе). Чи могли у всіх їжачків вийти різні числа? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 4 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

9 клас

1. Брати Артем та Олексій вирішили зняти смішний ролик для TikTok. Спочатку вони зняли, як кожен з них йде з дому до школи – Артем йшов 8 хвилин, а Олексій 5 хвилин. Повернувшись додому, вони сіли монтувати відео: вони запустили одночасно відео Артема з початку, а відео Олексія з кінця (у зворотному напрямку). У мить, коли на обох роликах брати опинилися в одному й тому ж місці дороги, вони склеїли обидва відео. У результаті брати отримали відео, в якому Артем йде із дому до школи, а потім у якусь мить перетворюється на Олексія і йде додому задом наперед. Ролик якої довжини отримали брати? Відповідь обґрунтуйте.

2. Розв'яжіть систему рівнянь: $[x] - y = 2[y] - z = 3[z] - x = \frac{2021}{2022}$.

Тут через $[a]$ позначено цілу частину a , тобто найбільше ціле число, що не перевищує a .

3. Нехай ω та Ω – два кола зі спільним центром O , причому ω лежить всередині Ω . На колі ω відмічено точки A, B такі, що хорда AB не є діаметром. Промінь AB перетинає коло Ω в точці C . Дотична до кола Ω в точці C та дотична до кола ω в точці A перетинаються в точці P . Пряма ℓ проходить через точку P та дотикається до Ω в точці D , відмінній від точки C . Доведіть, що пряма AP є бісектрисою кута CAD .

4. Знайдіть усі трійки натуральних чисел (a, b, c) , які задовольняють рівність

$$\text{НСК}(a, b) + \text{НСК}(a, c) + \text{НСК}(b, c) = \text{НСК}(a, b, c) + \text{НСД}(a, b, c).$$

5. На клітчастій площині живуть 20 їжачків. Кожен їжачок поділив кількість їжачків у своєму рядку на кількість їжачків у своєму стовпці (і там, і там їжачок враховує сам себе). Чи могли у всіх їжачків вийти різні числа? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 4 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.