

Олімпіада з математики ХФМЛ №27, 2021 р., 11 клас

1. Три гноми Дорі, Норі і Філі назбирали в лісі ягід. Вони принесли їх додому і зважили. Виявилось, що середнє арифметичне того, що зібрали Дорі і Норі, на 1 кг більше за вагу ягід, що зібрав Філі; а середнє арифметичне того, що зібрали Дорі і Філі, на 3 кг менше від ваги ягід, що зібрав Норі. Знайдіть різницю між середнім арифметичним того, що зібрали Норі і Філі, й ваги ягід, що зібрав Дорі.
2. Знайдіть усі значення параметра a , за яких рівняння $x^2 + ax - 6 = 0$ та $x^2 + (2a + 1)x + 2a - 4 = 0$ мають принаймні один спільний корінь.
3. Задано попарно різні додатні числа a , b і c . Три прямі $y = ax + b^2$, $y = bx + c^2$ та $y = cx + a^2$ обмежують трикутник на координатній площині. Доведіть, що цей трикутник перетинає вісь ординат.
4. Знайдіть кількість способів відмітити на шахівниці 31 клітинку таким чином, щоб жодні дві відмічені клітинки не мали спільної сторони. Два способи відмітити клітинки, що відрізняються поворотом дошки, вважаються різними.
5. Серединний перпендикуляр до бісектриси BL трикутника ABC перетинає бісектриси його зовнішніх кутів A і C у точках P і Q відповідно. Доведіть, що описані кола трикутників PBQ та ABC дотикаються один до одного.
6. Доведіть, що не існує простого числа p , для якого число $p^2 + p + 1$ є кубом натурального числа.