

Олімпіада з математики ХФМЛ №27, 2021 р., 10 клас

1. П'ятеро друзів Артем, Богдан, Василь, Гриць та Дмитро взяли кожен зі свого дому макулатуру та принесли її в пункт прийому. Після зважування вони з'ясували, що в середньому вони принесли 5,5 кг макулатури, але Артем та Богдан удвох в середньому принесли 3,7 кг. Скільки макулатури в середньому принесли Василь, Гриць та Дмитро?
2. Між містами А та Б курсують автобус та маршрутка. Їхні швидкості постійні, але різні. О 12:00 одночасно з А в Б виїхав автобус, а з Б в А – маршрутка. Перший раз вони зустрілися на відстані 18 км від міста А. Кожен раз, коли автобус чи маршрутка прибували в кінцевий пункт, вони робили зупинку впродовж 12 хвилин, а потім вирушали в зворотньому напрямку з тією ж швидкістю. Рівно о 15:00 того ж дня автобус та маршрутка одночасно прибули до міста Б, причому автобус встиг до того побувати одного разу в місті Б, а маршрутка за цей час двічі побувала в місті А. Знайдіть відстань між А та Б.
3. Дійсні числа x, y, z задовольняють умови $x^2 + y = z^2, y^2 + z = x^2, z^2 + x = y^2$. Які значення може приймати добуток xyz ?
4. Для деяких натуральних чисел a і b число $23a^2 + ab - b^2$ ділиться на 31. Доведіть, що число $a - 2b$ теж ділиться на 31.
5. Задано трикутник ABC , у якому $AB > AC$. На стороні AB відмічено точку D таку, що $BD = AC$. Нехай γ – це коло, що проходить через точку D та яке дотикається до прямої AC у точці A . Описане коло трикутника ABC перетинає γ у точках A та E . Доведіть, що точка E є точкою перетину серединних перпендикулярів до відрізків BC і AD .
6. У деякій країні кожне місто сполучене прямими автобусними рейсами рівно з трьома іншими містами. Колись усі рейси були державними, але з часом частину з них передали двом приватним компаніям. Тепер, щоб проїхати по будь-якому замкненому маршруту, необхідно скористатися послугами обох приватних компаній. Доведіть, що існує місто, з якого неможливо виїхати на автобусі державного рейсу.