

## Олімпіада з математики ХФМЛ №27, 2021 р., 9 клас

1. Олена та Уляна задумали по одному натуральному числу. Виявилось, що якщо число Олени помножити на себе, то вийде число в 100 раз більше, ніж якщо число Уляни помножити на себе. А якщо додати числа Олени та Уляни, отримане число буде на 18 більше, ніж половина від числа Олени. Знайдіть числа, що були задумані Оленою та Уляною.
2. Таблиця множення – це таблиця, в кожній клітинці якої записано добуток номера рядка та номера стовпчика. Чотири слони стоять у кутах деякого прямокутника в таблиці множення. Кожен зі слонів зробив хід всередину прямокутника – всі на однакову відстань. Доведіть, що сума чисел під ними не змінилась.
3. Кожен з п'яти друзів перемножив декілька послідовних натуральних чисел, починаючи з 1. Виявилось, що один з цих добуток дорівнює сумі чотирьох інших. Знайдіть усі можливі значення цього добутку.
4. Пару різних натуральних чисел будемо називати *досконалою*, якщо їхнє найменше спільне кратне ділиться на їхню різницю. Відомо, що серед усіх натуральних дільників числа  $n$  є рівно одна досконала пара. Які значення може приймати  $n$ ?
5. Трикутник  $ABC$  рівносторонній. Всередині кута  $ABC$  обрано точку  $M$  так, що  $\angle BMC = 30^\circ$  і  $\angle BMA = 17^\circ$ . Знайдіть величини кутів  $BAM$  і  $BCM$ .
6. 2021 кульку розташовано в ряд. Павло та Дмитро грають у наступну гру. Ходи роблять по черзі, починає Павло. За один хід можна пофарбувати одну із ще не пофарбованих кульок в один з трьох кольорів: червоний, жовтий або синій. Перед початком гри жодну з кульок не пофарбовано. Гра завершується, коли всі кульки пофарбовано. Перемагає Павло, якщо в ряду знайдуться три підряд кульки трьох різних кольорів, в іншому випадку перемагає Дмитро. Хто з гравців має вигравну стратегію?