

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2021 рік. 11 клас. 3 тур

1. На гіпотенузі AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC вибрано точки P та Q так, що P лежить на відрізку AQ і при цьому $\angle PCQ = 45^\circ$. Доведіть, що $AP^2 + QB^2 = PQ^2$.
2. Задано 2021 попарно різне натуральне число, жодне з яких не ділиться на 2^{1010} . Доведіть, що завжди можна вибрати з цих чисел три таких числа a , b та c , що число $|b^2 - 4ac|$ не є точним квадратом.
3. На святкування випуску прийшло n однокласників. Деякі з них дружать між собою, а деякі – ні. Їм роздали по пляшці шампанського та по одному порожньому келиху кожному, причому різним випускникам дісталася різна кількість шампанського. Далі їм запропонували зіграти у наступну гру: кожен з випускників по черзі мав зібрати келихи всіх своїх друзів та розлити все шампанське зі своєї пляшки порівну в ці келихи. Перемагає у цій грі той, хто зібрав у своєму келиху стільки ж шампанського, скільки було в його пляшці на початку. Яка найбільша кількість переможців могла бути в цій грі?
4. Для додатних дійсних чисел a , b , c , d , що задовольняють рівність $abcd = 1$, доведіть нерівність:

$$\frac{1}{a^3 + b + c + d} + \frac{1}{a + b^3 + c + d} + \frac{1}{a + b + c^3 + d} + \frac{1}{a + b + c + d^3} \leq \frac{a + b + c + d}{4}.$$