

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2021 рік. 10 клас. 3 тур

1. У гострокутному трикутнику ABC кут при вершині A дорівнює 45° . Доведіть, що півпериметр цього трикутника менший за суму його висот, що проведені з вершин B та C .

2. У простому графі G всього n вершин. Ребро e графа G будемо називати *вузьким місцем*, якщо вершини графа можна так розбити на дві множини A та B , що не більше 100 ребер з'єднує вершини A та B між собою та ребро e є одним з них. Доведіть, що не більше $100n$ ребер графа G є вузькими місцями.

3. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що для всіх дійсних x та y виконується рівність

$$f(xy) = yf(x) + x + f(f(y) - f(x)).$$

4. Послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ задано наступним чином:

$$a_1 \in \mathbb{Z}; \quad a_{k+1} = a_k^2 - a_k - 1, k \geq 1.$$

Доведіть, що числа a_{n+1} та $2n + 1$ є взаємно простими для всіх натуральних n .