

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2021 рік. 9 клас. 3 тур

1. Точки A, B, C, D та E розташовані на колі саме в такій послідовності. Відомо, що $AE = DE$ та P – точка перетину прямих AC та BD . Точка Q лежить на промені BA за точкою A таким чином, що $AQ = DP$. Точка R лежить на промені CD за точкою D таким чином, що $DR = AP$. Доведіть, що прями PE та QR перпендикулярні.
2. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $x^{100} - y^{100} = 100!$.
3. В одному місті мешкають декілька Великих сімей. Деякі сім'ї відчують ворожість одна до одної, та їх голови не тиснуть один одному руку при зустрічі. На одному з зібрань голів усіх Великих сімей було встановлено, що не можна більше трьох із них поставити в коло так, щоб кожен був готовий потиснути руку обом своїм сусідам. Одного разу Дон Корлеоне зібрав голів усіх Великих сімей. Він попросив кожну сім'ю віддати йому 3000 доларів. Потім закликав голів сімей потиснути один одному руки й пообіцяв за кожне рукостискання заплатити кожному з двох по 1000 доларів. Доведіть, що Дон Корлеоне отримає хоча б на 3000 доларів більше, ніж віддасть.
4. Послідовність дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ задовольняє умову $a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2a_{n-1} - a_n}$ при всіх $2 \leq n \leq 2020$. Відомо, що $a_1 = 1$ та $a_{2021} = 2021$. Які значення може приймати a_{1011} ?