

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2021 рік. 8 клас. 3 тур

1. Бісектриса кута B трикутника ABC перетинає його описане коло в точці D . На стороні BC відмічено таку точку E , що $\angle ADC = \angle AEC$. Доведіть, що $DC + DE > AB$.
2. Знайдіть усі четвірки дійсних чисел a, b, c, d , для яких виконуються рівності

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a + b + c + d - ab = 3.$$

3. а) У далекій-далекій країні є $2n$ міст, але зовсім немає доріг. Міністру інфраструктури дали доручення побудувати $n + 2$ дороги таким чином, щоб серед будь-яких n міст знайшлися два міста, які сполучені дорогою (кожна дорога з'єднує рівно два міста). Доведіть, що міністр не зможе виконати це доручення.
б) Після того, як міністр повідомив про неможливість виконання цього завдання, йому дали інше доручення: побудувати $n + 3$ дороги таким чином, щоб серед будь-яких n міст знайшлися два міста, які сполучені дорогою. Скількома різними способами він може це зробити?
4. Розв'яжіть рівняння $p^3 - 2p^2 + p + 1 = 3^n$, де p – просте число, а n – натуральне.