

## Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2021 рік. 11 клас. 2 тур

1. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

2. На змаганні з сумо було  $n$  учасників, і всі мали різну вагу. Між ними пройшло декілька боїв. Після закінчення змагання виявилось, що кожен сумоїст  $A$  хоча б в одному бою зустрічався з таким сумоїстом, у якого за весь турнір не було боїв з сумоїстами, легшими від  $A$ . Знайдіть усі значення  $n$ , при яких таке можливо.

3. Задано просте число  $p$  та цілі числа  $a$ ,  $b$  і  $r$ . Відомо, що числа  $r^7 - 1$ ,  $r + 1 - a^2$  та  $r^2 + 1 - b^2$  діляться на  $p$ . Доведіть, що існує таке ціле число  $c$ , що  $r^3 + 1 - c^2$  ділиться на  $p$ .

4. У трикутнику  $ABC$  точки  $D$  та  $E$  належать сторонам  $AB$  та  $AC$  відповідно, та  $DE \parallel BC$ . Відрізки  $BE$  та  $CD$  перетинаються в точці  $P$ . Кола, описані навколо трикутників  $APD$  та  $BPD$ , вдруге перетинаються в точці  $M$ , а кола, описані навколо трикутників  $APE$  та  $BPE$ , вдруге перетинаються в точці  $N$ . Коло  $\omega$  проходить через точки  $M$  та  $N$  й дотикається прямої  $BC$ . Доведіть, що дотичні до  $\omega$ , які проведено в точках  $M$  та  $N$ , перетинаються на прямій  $AP$ .