

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2021 рік. 10 клас. 2 тур

1. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел (a, b) , що

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 1.$$

2. Нехай $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Доведіть, що $x \sin x + \cos x \geq 1$.

3. Є декілька купок камінчиків. За один хід дозволяється взяти дві купки з кількістю камінчиків однієї парності, об'єднати в одну купку і потім розбити її на дві рівні купки. Знайдіть усі натуральні n такі, що для будь-якого натурального k і для будь-якого розбиття nk камінчиків на n купок, за кілька операцій можна отримати n купок з однаковою кількістю камінчиків.

4. У трикутнику ABC , в якому $AB < AC$, AD – висота, а O – центр описаного кола ω . Точка M є серединою сторони BC , точка T симетрична A відносно O . Дотичні до кола ω , проведені в точках B та C , перетинаються в точці S . Дотична до ω у точці T перетинає SC та SB у точках X та Y відповідно. Виявилось, що точки M, S, X, Y лежать на одному колі. Доведіть, що прями OD та ST паралельні.