

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2021 рік. 9 клас. 2 тур

1. Женья хоче розрізати клітчастий прямокутник розміром 2021×2022 на декілька квадратів (усі розрізи мають йти вздовж ліній сітки). Яку найменшу кількість квадратів із непарною стороною він може отримати?
2. Задано два квадратні тричлени $f(x)$ та $g(x)$. Відомо, що рівняння $f(x) = g(|x|)$ має рівно чотири різні корені. Скільки коренів має рівняння $f(|x|) = g(x)$?
3. Для деякого простого $p > 2$ задано множину S , що складається з $p+1$ цілого числа. Доведіть, що існують такі попарно різні елементи a_1, a_2, \dots, a_{p-1} множини S , для яких число $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (p-1)a_{p-1}$ ділиться на p .
4. У гострокутному рівнобедреному трикутнику ABC з $AB = AC$ точка D є серединою сторони AC . Коло γ описане навколо трикутника ABD . Дотична до γ у точці A перетинає пряму BC у точці E . Нехай O – центр описаного кола трикутника ABE . Доведіть, що середина відрізка AO лежить на колі γ .