

## Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2021 рік. 8 клас. 2 тур

1. Знайдіть усі натуральні  $k$ , для яких число  $k^2$  має рівно  $2k - 1$  натуральний дільник.
2. У господаря є 35 свиней та мішок з 26 кг корму. Доведіть, що він може нагодувати свиней таким чином, що будь-які дві свині разом будуть важити ціле число кілограмів.
3. а) На стороні  $CD$  квадрата  $ABCD$  відмічено точку  $Q$ . Бісектриса кута  $BAQ$  перетинає сторону  $BC$  у точці  $P$ . Доведіть, що  $AQ = BP + QD$ .  
б) На сторонах  $AB$  та  $CD$  квадрата  $ABCD$  відмічено точки  $P$  та  $Q$  відповідно так, що  $PQ$  проходить через центр квадрата  $ABCD$ . Бісектриси кутів  $BAQ$  та  $CDP$  перетинають відрізок  $BC$  у точках  $K$  та  $L$  відповідно. Доведіть, що  $AQ + DP = 2AD + KL$ .
4. Доведіть, що для довільних  $a, b, c$  рівність  $\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b} = 0$  виконується тоді й тільки тоді, коли виконується рівність  $\frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} = 0$ .