

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2021 рік. 11 клас. 1 тур

1. На книжковій полиці розташовано n книг, кожна з яких має висоту й товщину. Усі книги мають різну висоту і різну товщину. Спочатку книги розташовані зліва направо в порядку зростання висоти. За один хід дозволяється поміняти місцями дві сусідні книги, ліва з яких – товстіша й нижча за праву. Доведіть, що цей процес не може тривати нескінченно довго, й коли він завершиться, книги будуть розташовані в порядку зростання їх товщин.

2. Кола Ω та ω дотикаються внутрішнім чином у точці A . У більшому колі Ω проведено хорду CD , що дотикається кола ω в точці B (при цьому AB не є діаметром ω). Точка M – середина відрізка AB . Доведіть, що коло, описане навколо трикутника CMD , проходить через центр кола ω .

3. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для яких число $f(0)$ раціональне, та для будь-яких дійсних x і y виконується рівність:

$$f(x + (f(y))^2) = (f(x + y))^2.$$

4. Множина S , що складається з натуральних чисел, задовольняє наступну умову: для будь-яких чисел a та b з множини S (не обов'язково різних) число $ab + 1$ також міститься в S . Доведіть, що існує лише скінченна кількість простих чисел, що не є дільниками жодного елемента S .