

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2021 рік. 10 клас. 1 тур

1. На дошці намальовано прямокутник та розділено на 4 прямокутнички меншого розміру двома паралельними розрізами. Два брати-близнюки Фред та Джордж дивляться на дошку. Якщо до дошки підійде Фред, то він назве площу кожного з чотирьох маленьких прямокутничків у деякому випадковому порядку. Якщо Джордж підійде до дошки, то назве периметри чотирьох маленьких прямокутничків теж у випадковому порядку. Хтось з братів підійшов до дошки й назвав чотири числа. Джинні не бачить дошку, але чує числа, які були названі. При цьому вона не може за цими числами точно визначити, хто з братів підійшов до дошки. Чи можуть усі названі числа бути різними?
2. Довжини сторін трикутника ABC – попарно взаємно прості натуральні числа. Дотична, що проведена до описаного кола трикутника ABC у точці A , перетинає пряму BC у точці D . Доведіть, що довжина відрізка BD не може бути натуральною.
3. Знайдіть усі такі натуральні числа $n > 1$, що якщо до будь-якого натурального дільника n , відмінного від n , додати 2, то отримане число буде мати з n спільний дільник, більший за 1.
4. Чи існують функції $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що для всіх різних дійсних x та y виконується нерівність $|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| > 1$?