

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2021 рік. 8 клас. 1 тур

1. Ненульові числа x та y задовольняють нерівності $x^2 - x > y^2$ та $y^2 - y > x^2$. Який знак може мати добуток xy ?
2. У трикутнику ABC проведено медіану AD . Відомо, що $\angle ADB = 45^\circ$ та $\angle ACB = 30^\circ$. Знайдіть величину кута BAD .
3. Усі дільники натурального числа n вписали в порядку зростання. Нехай a і b — два сусідні дільники n у цьому списку. Виявилось, що $a^2 + b^2 = 2n + 1$. Доведіть, що $4n + 1$ — квадрат натурального числа.
4. У Шона є $2n$ кульок ($n \geq 2$) однакових за розміром, але деякі з них важкі, а всі інші — легкі. Важкі кульки мають однакову вагу, і легкі кульки мають однакову вагу. Обидва види кульок присутні. Доведіть, що за $n+1$ зважування на шалькових терезах без гир Шон зможе визначити кількість важких кульок