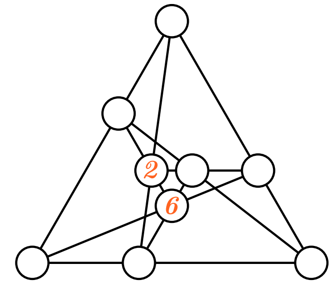
XXVI Всеукраїнська заочна математична олімпіада "5–12"



XXVI Всеукраїнська заочна математична олімпіада "5 – 12"

В олімпіаді може взяти участь кожен учень 5 – 12 класів. Наполегливо радимо потренуватися та випробувати свої здібності всім претендентам на участь в обласних та Всеукраїнській олімпіадах, а також відбіркових змаганнях на Міжнародну математичну олімпіаду.

Розв'язання задач слід надсилати до 25 лютого 2022 року (за поштовим штемпелем) на адресу

`01601 МСП, Київ,`
`Київський національний університет ім. Тараса Шевченка`
`механіко-математичний факультет`
`кафедра математичного аналізу`
`"Олімпіада 5-12"`

або у відсканованому вигляді на електронну адресу `olymp5-12@ukr.net`.

Підсумки олімпіади буде підведено наприкінці березня на сайті

`http://www.mechmat.univ.kiev.ua` .

Умови задач

1. Чи існує таке натуральне число $n > 2022$, що кожне з чисел $n-1$, n та $n+1$ ділиться на свою суму цифр?

2. У Малюка і Карлсона була однакова кількість булочок. Карлсон з'їв у чотири рази більше булочок, ніж Малюк, і у них разом залишилося 8 булочок. Скільки булочок було у Карлсона спочатку?

3. На дошці 9×9 пофарбували декілька клітинок так, що у кожному рядку та у кожному стовпчику пофарбовані рівно дві клітинки. Чи обов'язково на дошці знайдеться квадрат 2×2 без пофарбованих клітинок?

4. Вздовж доріжки ростуть 80 квіток. Серед будь-яких чотирьох послідовних квіток принаймні одна червона, а серед будь-яких п'яти послідовних квіток не більше однієї лілії. Довести, що принаймні 10 червоних квіток не є ліліями.

5. Впишіть у кружечки на емблемі олімпіади числа 1, 3, 4, 5, 7, 8 і 9 так, аби утворилася найбільша можлива кількість рядів по три числа з однаковою сумою.

6. Про ціле число n відомо, що $7n + 1$ — квадрат цілого числа. Довести, що $n + 1$ є сумою 7 квадратів цілих чисел.

7. Нехай I — центр кола, вписаного у трикутник ABC, в якому $\angle BAC = 60°$ та $AB \neq AC$. На променях BA та CA відмітили точки D та E так, що $BD = CE = BC$. Довести, що пряма DE проходить через точку I.

8. Кожен учень школи відвідав за рік не менше п'яти онлайн-екскурсій. Для будь-яких двох екскурсій існує не більше одного учня, який був на обох цих екскурсіях. Довести, що знайдуться п'ять екскурсій, на яких побувала однакова кількість учнів.
9. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1{,}2, \\ \{x\} + y + [z] = 3{,}4, \\ [x] + \{y\} + z = 5{,}6, \end{cases}$$

де $[t]$ та $\{t\}$ — ціла та дробова частини числа t.
10. Знайти всі прості числа $p \geq 3$ з такою властивістю: для кожного простого числа $q < p$ остача від ділення p на q не ділиться ні на 4, ні на 6.
11. Нехай D — точка на стороні AB трикутника ABC така, що $BD = CD$, а точки E на стороні BC та F на продовженні AC за точку C є такими, що $EF \parallel CD$. Прямі AE та CD перетинаються в точці G. Довести, що BC — бісектриса кута FBG.
12. Нехай $a, b, c \geq 0$. Довести, що

$$\frac{1 + a^2b}{1 + c^2b} + \frac{1 + b^2c}{1 + a^2c} + \frac{1 + c^2a}{1 + b^2a} > 2.$$