## 11 клас

**1.** Додатні числа $a$ і $b$ задовольняють рівність $a-b=\dfrac{a}{b}$. Яке з чисел більше: $a+b$ чи $ab$? Відповідь обґрунтуйте.

**2.** Микола виписав на дошку всі дільники деякого натурального числа $n>1$ у порядку зростання. Виявилося, що парні та непарні дільники чергуються. Чи може $n$ бути квадратом натурального числа? Відповідь обґрунтуйте.

**3.** Задано два квадратні тричлени $f(x)=x^2+px+q$ та $g(x)=x^2+rx+s$, коефіцієнти яких задовольняють рівність $p^2+r^2=2(q+s+1)$. Виявилося, що існує таке $\alpha\in(0,2\pi)$, що $\sin\alpha$ є коренем $f$, а $\cos\alpha$ є коренем $g$. Доведіть, що $(s+1)^2=r^2+q^2$.

**4.** У трикутнику $ABC$ відрізок $CL$ – бісектриса. Зовнівписане коло з центром в точці $I_c$ дотикається до сторони $AB$ у точці $D$ та до продовження сторін $CA$ і $CB$ у точках $P$ і $Q$ відповідно. Виявилося, що довжина відрізка $CD$ дорівнює радіусу цього зовнівписаного кола. Доведіть, що пряма $PQ$ ділить відрізок $I_cL$ навпіл.

**5.** У квадраті $2021\times2021$ деяку кількість клітинок пофарбовано в синій колір. *Хрестом* будемо називати множину всіх клітинок, що знаходяться в $k$-му рядку або в $\ell$-му стовпчику для деяких $k,\ell\in\{1,2,\ldots,2021\}$ (всього на дошці $2021^2$ хрестів, кожен складається з 4041 клітинки). Для кожного хреста розглянули множину синіх клітинок, що належать цьому хресту. Виявилося, що всі розглянуті множини є попарно різними. Знайдіть найменшу можливу кількість синіх клітинок на дошці. Відповідь обґрунтуйте.

*Кожна задача оцінюється у 7 балів.*
*На виконання завдань відводиться 3,5 години.*
*Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.*

Умови та розв'язки задач олімпіади та результати учасників можна знайти за адресою `https://sites.google.com/view/kharkiv-math-olymp/`
Апеляція відбудеться 23 грудня з $15^{15}$ до $16^{30}$ в ауд. 6-52.

Другий (міський в м. Харкові) етап Всеукраїнської олімпіади школярів з математики. 20 грудня 2021 року

11 клас

1. Додатні числа $a$ і $b$ задовольняють рівність $a-b=\dfrac{a}{b}$. Яке з чисел більше: $a+b$ чи $ab$? Відповідь обґрунтуйте.

2. Микола виписав на дошку всі дільники деякого натурального числа $n>1$ у порядку зростання. Виявилося, що парні та непарні дільники чергуються. Чи може $n$ бути квадратом натурального числа? Відповідь обґрунтуйте.

3. Задано два квадратні тричлени $f(x)=x^2+px+q$ та $g(x)=x^2+rx+s$, коефіцієнти яких задовольняють рівність $p^2+r^2=2(q+s+1)$. Виявилося, що існує таке $\alpha\in(0,2\pi)$, що $\sin\alpha$ є коренем $f$, а $\cos\alpha$ є коренем $g$. Доведіть, що $(s+1)^2=r^2+q^2$.

4. У трикутнику $ABC$ відрізок $CL$ – бісектриса. Зовнівписане коло з центром в точці $I_c$ дотикається до сторони $AB$ у точці $D$ та до продовження сторін $CA$ і $CB$ у точках $P$ і $Q$ відповідно. Виявилося, що довжина відрізка $CD$ дорівнює радіусу цього зовнівписаного кола. Доведіть, що пряма $PQ$ ділить відрізок $I_cL$ навпіл.

5. У квадраті $2021\times2021$ деяку кількість клітинок пофарбовано в синій колір. Хрестом будемо називати множину всіх клітинок, що знаходяться в $k$-му рядку або в $\ell$-му стовпчику для деяких $k,\ell\in\{1,2,\ldots,2021\}$ (всього на дошці $2021^2$ хрестів, кожен складається з 4041 клітинки). Для кожного хреста розглянули множину синіх клітинок, що належать цьому хресту. Виявилося, що всі розглянуті множини є попарно різними. Знайдіть найменшу можливу кількість синіх клітинок на дошці. Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 3,5 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Умови та розв'язки задач олімпіади та результати учасників можна знайти за адресою https://sites.google.com/view/kharkiv-math-olymp/
Апеляція відбудеться 23 грудня з $15^{15}$ до $16^{30}$ в ауд. 6-52.