

10 клас

1. Марійці потрібно повністю зарядити свій ноутбук за 2,5 години. Вона знає, що у вимкненому стані ноутбук повністю заряджається за 2 години, а якщо дивитися кіно на ноутбуці під час його заряджання, то він заряджається в 4 рази довше. Яку найбільшу кількість часу Марійка може дивитися кіно? Відповідь обґрунтуйте.

2. Чи можна з множини  $\{1, 2, \dots, 11\}$  вибрати десять попарно різних чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  так, щоб усі десять чисел  $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \dots, |a_{10} - a_1|$  теж були попарно різними? Відповідь обґрунтуйте.

3. Для додатних чисел  $a, b, c$ , які задовольняють умову  $abc = 1$ , доведіть нерівність:

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geq \frac{3}{2}.$$

4. У турнірі з футболу взяли участь  $n$  команд, причому кожна команда зіграла з кожною рівно один матч. Після завершення турніру виявилось, що кожна команда набрала стільки очок, скільки нічиїх сталося в усіх матчах без її участі. Доведіть, що число  $n$  є парним.

У футбольному турнірі за перемогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, а за поразку – 0 очок.

5. Вписане коло  $\Omega$  трикутника  $ABC$  дотикається до сторін  $AB$  та  $AC$  у точках  $K$  та  $L$  відповідно. Пряма  $BL$  вдруге перетинає коло  $\Omega$  у точці  $M$ . Коло  $\omega$  проходить через точку  $M$  та дотикається до прямих  $AB$  і  $BC$  у точках  $P$  і  $Q$  відповідно. Нехай  $N$  – це друга точка перетину кіл  $\omega$  та  $\Omega$ , яка відмінна від  $M$ . Доведіть, що якщо  $KM \parallel AC$ , то точки  $P, N$  і  $L$  лежать на одній прямій.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 3,5 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Умови та розв'язки задач олімпіади та результати учасників можна знайти за адресою <https://sites.google.com/view/kharkiv-math-olymp/>

Апеляція відбудеться 23 грудня з 15<sup>15</sup> до 16<sup>30</sup> в ауд. 6-52.

10 клас

1. Марійці потрібно повністю зарядити свій ноутбук за 2,5 години. Вона знає, що у вимкненому стані ноутбук повністю заряджається за 2 години, а якщо дивитися кіно на ноутбуці під час його заряджання, то він заряджається в 4 рази довше. Яку найбільшу кількість часу Марійка може дивитися кіно? Відповідь обґрунтуйте.

2. Чи можна з множини  $\{1, 2, \dots, 11\}$  вибрати десять попарно різних чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  так, щоб усі десять чисел  $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \dots, |a_{10} - a_1|$  теж були попарно різними? Відповідь обґрунтуйте.

3. Для додатних чисел  $a, b, c$ , які задовольняють умову  $abc = 1$ , доведіть нерівність:

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geq \frac{3}{2}.$$

4. У турнірі з футболу взяли участь  $n$  команд, причому кожна команда зіграла з кожною рівно один матч. Після завершення турніру виявилось, що кожна команда набрала стільки очок, скільки нічиїх сталося в усіх матчах без її участі. Доведіть, що число  $n$  є парним.

У футбольному турнірі за перемогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, а за поразку – 0 очок.

5. Вписане коло  $\Omega$  трикутника  $ABC$  дотикається до сторін  $AB$  та  $AC$  у точках  $K$  та  $L$  відповідно. Пряма  $BL$  вдруге перетинає коло  $\Omega$  у точці  $M$ . Коло  $\omega$  проходить через точку  $M$  та дотикається до прямих  $AB$  і  $BC$  у точках  $P$  і  $Q$  відповідно. Нехай  $N$  – це друга точка перетину кіл  $\omega$  та  $\Omega$ , яка відмінна від  $M$ . Доведіть, що якщо  $KM \parallel AC$ , то точки  $P, N$  і  $L$  лежать на одній прямій.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 3,5 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Умови та розв'язки задач олімпіади та результати учасників можна знайти за адресою <https://sites.google.com/view/kharkiv-math-olymp/>

Апеляція відбудеться 23 грудня з 15<sup>15</sup> до 16<sup>30</sup> в ауд. 6-52.